[11] *Newton, I.*: Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Londini 1687.

[12] *Noll, E. D.*: Teaching Kepler's law as more than empirical statements. Physics Education, roč. 37 (2002), č. 3, s. 245–250.

[13] *Štefl, V.*: Třetí Keplerův zákon. Matematika a fyzika ve škole, roč. 7 (1977), č. 6, s. 450–453.

[14] *Štefl, V., Domański, J.*: Prawa Keplera w nauczaniu fizyki. Fizyka w Szkole, roč. 55 (2009), č. 3, s. 37–40.

[15] *Ghez, A. M., et al.*: Full Three Dimensional Orbits For Multiple Stars on Close Approaches to the Central Supermassive Black Hole. Astronomische Nachrichten, roč. 324 (2003), Supplement 1, s. 527–533.

Obecné řešení Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA – JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Tato práce navazuje na předchozí experimentální ověření teoretického řešení úlohy o kmitavém pohybu jednorozměrného otevřeného systému s proměnnou hmotností [1]. Teoretické řešení Buquoyovy úlohy pro případ nehmotné tažné síly je v [2].

Původní teorie byla rozšířena o další dva parametry, které ovlivňují pohyb balónku naplněného heliem se zavěšeným ohebným vláknem s proměnnou hmotností (viz [1, obr. 1]).

Obecné řešení

Pro nalezení shody mezi teoretickým modelem a experimentálně naměřenými hodnotami musíme vzít v úvahu další dva faktory. Zaprvé odpor prostředí, který zpomaluje pohyb balónku, a za druhé hmotnost tělesa, které táhne vlákno. V našem případě se jedná tedy o hmotnost balónku m_b. Teoretický model, který je uveden v [2], uvažuje pouze nehmotnou tahovou sílu, ale v reálném experimentu musíme pak do teoretického modelu zahrnout i výše uvedené dva faktory.

Výchozí pohybová rovnice (1) pro odvození rovnice (2) je tedy v obecném tvaru dána jako:

$$(\eta y\dot{y} + m_{\mathrm{b}}\dot{y})' = F - \eta y g - \gamma\dot{y}, \tag{1}$$

kde γ je koeficient odporu prostředí a η je lineární hustota vlákna.

Rovnici (1) můžeme po úpravách zformulovat do obecnějšího tvaru (2):

$$\ddot{y} = \frac{1}{y+\alpha}\left[g(y_{\mathrm{c}} - y) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}\dot{y})\dot{y}^2 - \beta\dot{y}\right], \tag{2}$$

kde $\alpha = m_{\mathrm{b}}/\eta$ je faktor související s hmotností reálného tělesa, které táhne řetízek, $\beta = \gamma/\eta$ je člen, který zahrnuje odpor prostředí.

Rovnice (2) pro $\alpha = 0$ m a $\gamma = 0$ kg $\cdot$ s^{-1} přechází na rovnici (3) uvedenou v [2]:

$$\ddot{y} = g\left(\frac{y_{\mathrm{c}}}{y} - 1\right) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}\dot{y})\frac{\dot{y}^2}{y}. \tag{3}$$

K fitování jsme použili program Wolfram Mathematica verze 11.2.0.0. a jeho funkci NonlinearModelFit, která vrací symbolický objekt FittedModel. Tento nelineární model je definován numerickými operacemi, tj. umožňuje numerické řešení diferenciální rovnice (2). Obr. 1 ilustruje porovnání nafitovaného modelu (červená křivka), daného rovnicí (2), s experimentálně naměřenými daty získanými videoanalýzou pohybu řetízku v programu Tracker (černá křivka).

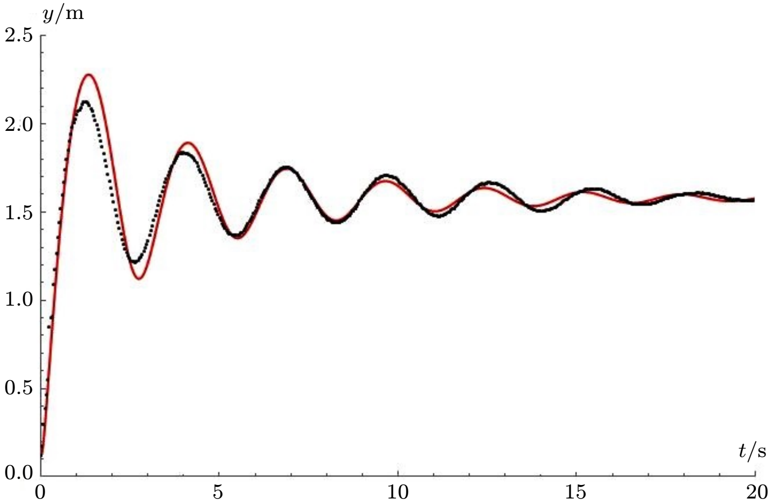
Jak můžeme vidět na grafu na obr. 1, obě křivky se velice dobře shodují. Teoretický model v programu Wolfram Mathematica vypočítal hodnotu koeficientu $\alpha \doteq 0{,}303$ m. Hmotnost balónku v reálném experimentu byla změřena jako $m_{\mathrm{b}} = (3{,}2 \pm 0{,}1)$ g a koeficient α má tedy v reálném provedení hodnotu

$$\alpha = \frac{3{,}2}{10{,}4}\ \mathrm{m} \doteq 0{,}308\ \mathrm{m}.$$

Reálná hodnota je tedy v dobré shodě s teoreticky vypočítanou.

Hodnota koeficientu zahrnující odpor prostředí byla teoretickým modelem obdobně určena jako $\beta = 0{,}57$ m $\cdot$ s^{-1} a hodnota $y_{\mathrm{c}} = 1{,}578$ m (experimentální výsledek $y_{\mathrm{c}} = 1{,}564$ m je od hodnoty predikované programem Wolfram Mathematica přibližně o 1 % menší).

Na závěr jsme provedli statistickou analýzu párovým t-testem s rovností rozptylů, kterým jsme testovali nulovou hypotézu, že teoretické hodnoty a experimentálně naměřené, se na hladině statistické významnosti $\alpha = 0{,}05$ významně statisticky neliší. Tato hypotéza byla potvrzena.



Obr. 1 Teoretický model (červená křivka) a reálný průběh pohybu (černá křivka)

Závěr

Reálný průběh pohybu se od teoretického modelu při zahrnutí hmotnosti tažného tělesa a odporu prostředí téměř neliší. Statistickou analýzou pomocí párového t-testu s rovností rozptylů byla potvrzena nulová hypotéza, tedy že hodnoty predikované teoretickým modelem a experimentálně naměřené se na hladině statistické významnosti $\alpha = 0{,}05$ vzájemně neliší.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [2]. Zobecněný model, který byl navržen autory tohoto článku, již velice dobře popisuje reálný experiment.

Literatura

[1] *Kodejška, Č., Říha, J.*: Experimentální realizace Buquoyovy úlohy. MFI, roč. 26 (2017), č. 5, s. 380–384.

[2] *Šíma, V., Podolský, J.*: Buquoyova úloha. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 177, [online], dostupné na: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141315`