Vypuštění podmínky – užitečná heuristická strategie

PETR EISENMANN – JIŘÍ BŘEHOVSKÝ

Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem

Úvod

Již ve starověku matematikové začali vytvářet strategie, které by jim pomohly řešit matematické problémy. Tak se zrodila disciplína zvaná heuristika. Česky bychom ji mohli nazvat Umění objevu. Do této disciplíny přispívali svými poznatky významní matematikové historie. Jmenujme zde alespoň *Pappa z Alexandrie*, *Descarta*, *Leibnize*, *Bolzana* a *Polyu.* Strategie, o nichž zde hovoříme, jsou vlastně nástroje, které nám pomáhají najít cestu od formulace problému k jeho vyřešení. Dnes známe celou řadu užitečných strategií, které matematikové běžně používají, když řeší problémy. Bylo by velmi užitečné, kdyby se některé z těchto strategií dostaly i do školské matematiky. Jmenujme zde několik základních, představu si lze udělat už ze samotných názvů: experimentování, zobecňování a konkretizace, analogie, vypuštění podmínky, zavedení pomocného prvku, rozklad na jednodušší případy, cesta zpět. Dobří učitelé některé z těchto strategií ve své výuce intuitivně používají. Dostali se k nim většinou tak, že se jako žáci, studenti a později jako učitelé nespokojili s řešením standardních problémů standardními metodami.

My se zde budeme na ukázku zabývat jednou z těchto strategií, a to strategií vypuštění podmínky. Nebudeme příliš teoretizovat, spíše ji ukážeme při řešení několika úloh ze školské matematiky. Přesto však úvodem pár slov.

Je zadána úloha, v níž je vysloveno několik podmínek. Pokud nejsme schopni při řešení takového problému splnit najednou všechny požadované podmínky, můžeme si spolu s Zeitzem (viz [5]) položit otázku: „Co přesně činí tento problém tak složitý?“. Podaří-li se nám určit, která ze vstupních podmínek je tou obtížnou, můžeme se pokusit ji vypustit. Jestliže se nám povede takto oslabenou úlohu vyřešit, k vypuštěné podmínce se vrátíme a úlohu se pokusíme dořešit. Částečně hovoří o strategii vypuštění podmínky ve své knize o řešení problémů i Polya, který tento princip nazývá

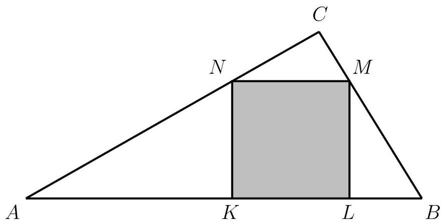
Dropping a part of the condition (viz [4]). Další aspekty této heuristické strategie jsou popsány v [3].

A nyní již ilustrujme popisovanou strategii několika úlohami. Poznamenejme ještě, že mnohé úlohy zde uvedené se samozřejmě dají řešit i jinak, buď standardní cestou, nebo jinou heuristickou strategií. My zde ale u každé úlohy přirozeně uvádíme jen řešení pomocí strategie vypuštění podmínky. Výhodnost jejího použití vysvitne samozřejmě nejvíce tam, kde je jako způsob řešení nejefektivnější či dokonce jedinou cestou k vyřešení daného problému. Tak je tomu i u následující, první úlohy.

Ilustrující úlohy

Úloha 1

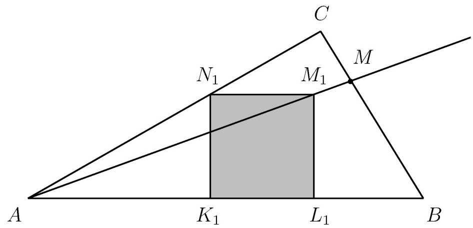
Je dán trojúhelník ABC. Vepište do tohoto trojúhelníku čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na straně AB, vrchol M na straně BC a vrchol N na straně AC (viz obr. 1).



Obr. 1

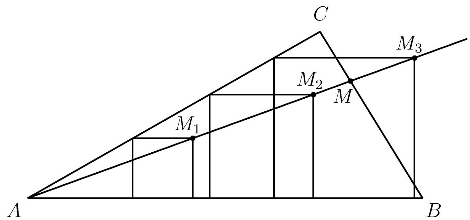
Řešení: Zřejmě se nám nepodaří sestrojit ihned čtverec splňující všechny podmínky. Pokud však vypustíme podmínku „vrchol M leží na straně BC“, pak takový čtverec $K_1L_1M_1N_1$ sestrojíme snadno (viz obr. 2). Stačí jej „vepsat“ do úhlu BAC. Náš hledaný čtverec bude s tímto čtvercem stejnolehlý ve stejnolehlosti se středem v bodě A. Bod M proto bude ležet na průsečíku polopřímky AM_1 se stranou BC.

Poznámka. Pokud žáci zobrazení zvané stejnolehlost ještě neznají, pak můžeme k řešení dojít pomocí experimentování. Sestrojíme více čtverců vepsaných do úhlu BAC (viz obr. 3). Všechny námi sestrojené vrcholy M_i leží zřejmě na polopřímce. Toto pozorování zobecníme:



Obr. 2

Hypotéza: Všechny vrcholy M_i čtverců $K_iL_iM_iN_i$ leží na polopřímce procházející bodem A. Průsečík polopřímky AM_1 se stranou BC je vrchol M hledaného čtverce.



Obr. 3

Na následující úloze si může učitel vyzkoušet, zda jeho žáci popsanou strategii v uvedeném kontextu pochopili a dovedou ji aktivně použít.

Úloha 2

Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož strany jsou v poměru $3 : 2$ a jehož úhlopříčka má délku 7 cm.

Strategie vypuštění podmínky se ale dá použít i u některých slovních úloh, jak ukazuje následující problém.

Úloha 3

Část lístků do divadla stála 11 Kč a část byla po 8 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 965 Kč?

Řešení: Vynechejme v následujících úvahách úplně údaj o celkovém počtu lístků. Získáme tím vlastně novou úlohu, jejíž řešení převedeme na řešení příslušné diofantické rovnice, kde x označuje počet lístků za 11 Kč a y počet lístků za 8 Kč. Pak platí:

$$11x + 8y = 965 \tag{1}$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojím způsobem.

První způsob řešení je vhodný pro nadané studenty a vede k formulaci dvojice generátorů celočíselných řešení x a y

$$\begin{aligned} y &= \frac{965 - 11x}{8}, \\ y &= \frac{968 - 3 - 8x - 3x}{8}, \\ y &= 121 - x - 3 \cdot \frac{1 + x}{8}. \end{aligned}$$

Nyní do řešení zavedeme parametr $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1 + x}{8} = k \ \Rightarrow x = 8k - 1.$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} y &= 121 - (8k - 1) - 3k, \\ y &= 122 - 11k. \end{aligned}$$

Řešením diofantovské rovnice (1) jsou tedy dvojice čísel tvaru

$$\begin{aligned} x &= 8k - 1, \\ y &= 122 - 11k. \end{aligned}$$

Uspořádejme si konkrétní výsledky pro jednotlivá k do tabulky.

k	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11
x	7	15	23	31	39	47	55	**63**	72	79	87
y	111	100	89	78	67	56	45	**34**	23	12	1
součet	118	115	112	109	106	103	100	**97**	94	91	88

Tab. 1

Všechna řešení v oboru přirozených čísel jsou uvedena v tabulce 1. Je zřejmé, že zohledníme-li nyní vypuštěnou podmínku (tedy že lístků bylo celkem 97), je úloha rozřešená.

Druhý způsob řešení se opírá o řešení rovnice (1) s využitím tabulkového procesoru, kde je ve druhém sloupci vyčíslena vždy hodnota y pomocí vzorce

$$y = \frac{965 - 11x}{8}.$$

x	y	$x + y$
1	119,25	120,25
2	117,875	119,875
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
62	35,375	97,375
63	**34**	**97**

Tab. 2

Z tabulky 2 je vidět, že na posledním jejím řádku jsme se vrátili zpět k vypuštěné podmínce (tedy že lístků bylo celkem 97) a úlohu rozřešili.

Odpověď: V divadle prodali 63 lístků po 11 Kč a 34 lístků po 8 Kč.

Strategii vypuštění podmínky často ve školské matematice mlčky používáme, aniž bychom si to uvědomovali. Ilustrací mohou být následující dvě úlohy. První z nich je tradiční úloha, kterou učitel řeší rutinně, neboť za odpovědí stojí již jeho vybudovaná znalost. Řešitel, který se ale s problémem setká poprvé, může být naveden k uvažování a řešení úlohy právě takto.

Úloha 4

V rovině jsou dány tři body, které neleží na jedné přímce. Určete bod, který má od každého z daných bodů stejnou vzdálenost.

Řešení: Výsledkem bude bod P, který bude stejně vzdálen od daných bodů A, B, C. Máme tedy podmínky: $|PA| = |PB|$ a $|PA| = |PC|$. Vztah mezi $|PB|$ a $|PC|$ plyne z transitivnosti rovnosti. Vypusťme nyní druhou podmínku. Hledáme bod P, pro který platí první podmínka. Je zřejmé, že tyto body leží na ose úsečky AB a je jich nekonečně mnoho. Nyní přijměme zpět druhou podmínku. Sestrojíme všechny body, které mají vlastnost $|PA| = |PC|$. Hledaný bod P je potom společným bodem obou množin (průsečík dvou přímek).

Odpověď: Hledaný bod P je průsečíkem os úseček AB a AC (jedná se o střed kružnice opsané trojúhelníku ABC).

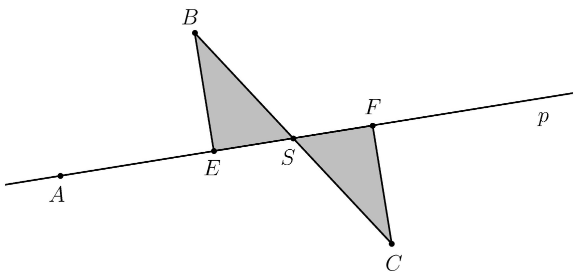
Úloha 5

V rovině jsou dány tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Sestrojte přímku, která prochází bodem A a body B a C mají od ní stejnou vzdálenost.

(*Zadání úlohy je převzato z* [4].)

Řešení: Pokud bychom řešili tuto úlohu strategií Pokus – omyl, mohli bychom zkusit uvažovat jako řešení osu úhlu BAC. Vhodnou volbou bodů však lehce takovou ideu vyvrátíme. Vypusťme tedy podmínku, že přímka prochází bodem A a hledejme všechny přímky, které mají od bodů B a C stejnou vzdálenost.

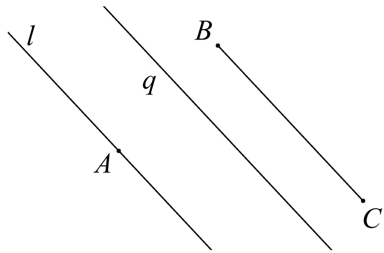
1. Jednou z těchto přímek je například osa úsečky BC. Stěžejní je, že osa prochází středem S této úsečky. Nyní si stačí uvědomit, že každá přímka, která prochází středem úsečky BC, je od bodů B a C stejně vzdálena. Tato skutečnost vyplývá ze shodnosti trojúhelníků, jak si ukážeme za chvíli. Nyní přijměme vypuštěnou podmínku zpět a přímku procházející středem úsečky BC veďme bodem A. Podívejme se nyní na obrázek 4.



Obr. 4

Aby p byla hledanou přímkou, musí platit $|BE| = |CF|$. Úsečky BE a CF jsou zřejmě kolmé na přímku p. Protože $|BS| = |CS|$ a $|\sphericalangle BSE| = |\sphericalangle CSF|$ a $|\sphericalangle BES| = |\sphericalangle CFS|$, jsou trojúhelníky SBE a SCF shodné a tudíž úsečky BE a CF mají stejnou velikost.

2. Jinou přímkou mající stejnou vzdálenost od bodů B a C je libovolná rovnoběžka q s přímkou BC.



Obr. 5

Je zřejmé, že pokud je přímka q rovnoběžná s přímkou BC, platí

$$\mathrm{vzd}(B, q) = \mathrm{vzd}(C, q).$$

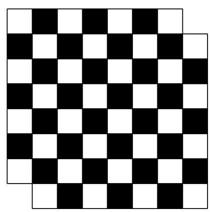
Nyní přijměme vypuštěnou podmínku zpět a sestrojme přímku l, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou BC.

Odpověď: Úloha má dvě řešení. Prvním řešením je přímka procházející bodem A a středem úsečky BC, druhým řešením je přímka procházející bodem A, která je rovnoběžná s přímkou BC.

Nyní uveďme řešení jedné úlohy z rekreační matematiky, jejíž řešení lze nalézt mimo jiné v [1].

Úloha 6

Je dána klasická šachovnice, ze které jsou odstraněna dvě protilehlá rohová černá pole (viz obr. 6). Mějme dále dostatečný počet dominových kostek. Je možné pokrýt všechna pole této ochuzené šachovnice dominovými kostkami bez překrývání?



Obr. 6

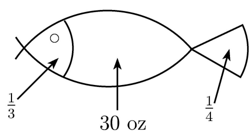
Řešení: Úlohu můžeme začít řešit experimentováním. Pokrýt požadovaným způsobem ochuzenou šachovnici se nám ale ani po delší době nebude dařit. Vypusťme tedy podmínku upravené šachovnice a pracujme s klasickou šachovnicí o 64 polích. Tuto šachovnici je poměrně snadné pokrýt dominovými kameny. Nyní přijměme omezení – z vyřešené úlohy (pokrytá šachovnice) odstraňme protilehlá černá pole. Je vidět, že spolu s poli „zmizí“ i kostky a zůstanou prázdná dvě bílá pole. Protože však každá kostka pokryje vždy jedno bílé a jedno černé pole, zbylá pole nejde překrýt žádnou dominovou kostkou, ať přeuspořádáme kameny jakkoliv.

Odpověď: Ochuzenou šachovnici není možné pokrýt dominovými kostkami.

Způsob řešení následující, poslední úlohy by se spíše měl jmenovat Nahrazení podmínky. Při řešení této úlohy totiž jednu podmínku vypustíme a nahradíme jinou. Problém sám pochází z 15. století (viz [2]). Popsaný způsob jeho řešení přitom ukazuje, jak elegantně dokázali matematikové řešit úlohy, aniž měli k dispozici dnešní běžný aparát školské matematiky, tedy rovnice.

Úloha 7

Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ celé ryby, její ocas váží $\frac{1}{4}$ celé ryby a její tělo váží 30 uncí (viz obr. 7). Kolik váží celá ryba?



Obr. 7

Řešení: Vypusťme podmínku, že tělo ryby váží 30 uncí. Bez ní ale nelze úlohu vyřešit. Nahraďme ji tedy podmínkou jinou – mluvme o jiné rybě, a to takové, která celá váží 12 uncí. Proč zrovna 12, je zřejmé – jde o nejmenší společný násobek čísel 3 a 4. Tato nová ryba má hlavu, která zřejmě váží 4 unce a ocas, jehož hmotnost je rovna 3 uncím. Její tělo tedy váží 5 uncí. Ryba ze zadání naší úlohy je této malé rybě „podobná“, její proporce jsou stejné. Protože její tělo je šestkrát těžší, musí být šestkrát těžší i hlava a ocas.

Odpověď: Ryba váží 72 uncí.

Literatura

[1] *Calda, E.*: Pár jednoduchých úloh o šachovnici. Matematika, fyzika, informatika č. 3, roč. 6 (1996), s. 127–131.

[2] *Kopka, J.*: Hrozny problémů ve školské matematice. Ústí n. L.: UJEP, 1999.

[3] *Kopka, J.*: Výzkumný přístup při výuce matematiky. Ústí n. L.: UJEP, 2007.

[4] *Polya, G.*: How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press, 2004.

[5] *Zeitz, P.*: The Art and Craft of Problem Solving. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2007.

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantu GAČR č. 407/12/1939.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 10. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 195

Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, kde $\gamma > 90°$. Dokažte nerovnost

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1.$$

Józef Kalinowski (Kalety)

Úloha 196

Dvě poloroviny se společnou hraniční přímkou svírají úhel 60° a vytvářejí *klín*. Do něj jsou umístěny dvě koule $k_1(S_1; r)$ a $k_2(S_2; r)$, které se mají vnější dotyk a současně se obě dotýkají i stěn klínu. Vypočtěte poloměr ρ třetí koule k_3, která se dotýká současně obou koulí k_1 a k_2 také stěn tohoto klínu.

Stanislav Trávníček