Analogie v matematice a jejich didaktické využití

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Pojmem *analogie* (z řec. analogia = obdoba, podobnost) různých (netotožných) objektů, popř. jevů či situací se rozumí nalezení jejich podobných (spec. stejných) vlastností. Na základě shody jedněch vlastností se usuzuje na shodu dalších vlastností. V tomto smyslu se s používáním analogií setkáváme nejen v běžném životě či v umění, ale zejména ve vědách humanitních (filozofii, logice, psychologii, právu, lingvistice), vědách přírodních (fyzice, chemii, biologii) i vědách technických (mechanice, elektrotechnice, stavebnictví) a speciálně v matematice. Analogie se používají nejen v matematice jako vědě, ale mají též specifický význam a využití ve vyučování matematiky, jehož didaktickými aspekty se budeme zabývat v tomto článku.

Pojem analogie v matematice, klasifikace analogií

Analogie matematických objektů je vztah mezi netotožnými matematickými objekty, které mají jisté vlastnosti podobné (spec. stejné). Obdobně se definují pojmy *analogie matematických systémů, analogie matematických situací* apod. Matematické objekty, jež jsou vzájemně ve vztahu matematické analogie, se nazývají *analogické matematické objekty.* S příklady se setkáváme prakticky ve všech matematických disciplínách. Typickými příklady jsou dvojice analogických planimetrických a stereometrických útvarů (podrobněji viz [12, str. 96]): *čtverec – krychle, obdélník – kvádr, rovnoběžník – rovnoběžnostěn, trojúhelník – čtyřstěn, mnohoúhelník – mnohostěn, kruh – koule.*

V matematice i dalších vědních oborech se lze setkat s rozlišováním různých druhů analogií. Z kognitivního (poznávacího) hlediska se rozlišují dva typy analogií:

Intuitivní analogie (*heuristická analogie*) je analogie získaná pouze na základě intuice, tj. pouhého bezprostředního vytušení (bez hlubšího zdůvodnění).

Strukturní analogie (*syntaktická analogie*) je analogie založená na zjištění určité podobnosti dvou *matematických struktur*, tj. množin matematických objektů s danými vlastnostmi.

Usuzování z analogie

V matematické logice se používají tři druhy *usuzování* (vytváření *úsudků*):

Deduktivní usuzování představuje vytváření logicky správných úsudků na základě výrokové logiky. V matematice je základem *dokazování* (*důkazů matematických vět*).

Induktivní usuzování je založené zpravidla na neúplné indukci. V matematice má charakter *heuristické (objevitelské) metody*, jež mnohdy může posloužit k formulaci věrohodných (pravděpodobně platných) *matematických hypotéz*.

Usuzování z (na základě) analogie má obvykle jednu z následujících dvou forem *heuristického úsudku*:

a) Premisy (předpoklady) úsudku:
Objekt (systém) A je analogický s objektem (systémem) B.
Objekt (systém) B má vlastnost v.

Závěr úsudku: Objekt (systém) A má pravděpodobně též vlastnost v.

b) Premisy (předpoklady) úsudku:
Výrok p je analogický k výroku q.
Výrok q je pravdivý.

Závěr úsudku: Výrok p je pravděpodobně též pravdivý.

Poznámka. Zakladatelem moderního pojetí heuristiky v matematice a vynikajícím propagátorem užití heuristických metod v didaktice matematiky byl maďarský matematik *George Pólya* [džordž pója] (1887–1985), který po mnoho let pedagogicky působil a vědecky tvořil v USA. Jeho knihy [1] a [2] se staly klasickými v oboru didaktického využití heuristických metod v matematice.

Při řešení matematických problémů heuristickými metodami je ovšem důležité si uvědomovat, že jejich výsledkem je vždy pouze vyslovení nějaké *matematické hypotézy*, jejíž pravdivost je pak nutné v další (deduktivní) části řešení buď *dokázat*, anebo *vyvrátit*. V této souvislosti v literatuře (např. v knize [2]) se dokládá na četných příkladech, že v historii matematiky vedlo vhodné použití metody analogie k zásadním objevům, ale její pouhé intuitivní užití svedlo vědce i k vyslovení nesprávných (nepravdivých) hypotéz. Viz např. [12, s. 283].

Základní didaktická využití analogií ve výuce matematiky

Z didaktického hlediska je užití analogií ve vyučování matematiky vhodné a užitečné zejména v těchto případech:

- při analogické formulaci matematických definic a vět,
- při objevování a vyšetřování nových matematických vlastností,
- při řešení analogických matematických úloh,
- k snadnějšímu a trvalejšímu zapamatování určitých analogických matematických poznatků.

Typické příklady didaktického využití analogií:

Analogické definice a věty, např. základní věty pro číselné rovnosti a nerovnosti, definice a věty o vlastnostech operací v různých číselných oborech, o úpravách rovnic a nerovnic, definice a věty pro aritmetické a geometrické posloupnosti, o rovnoběžnosti a kolmosti v rovině a v prostoru (přitom pro některé planimetrické věty analogické stereometrické věty neplatí), o míře geometrických útvarů v rovině a v prostoru, pro geometrická tělesa (hranol – válec, rotační válec – rotační kužel apod.), definice a věty pro kuželosečky (analogické geometrické definice a analytická vyjádření).

Analogická řešení typových úloh v algebře, geometrii (výpočetních i konstrukčních úloh), v kombinatorice aj. Specificky je analogie využívána při řešení gradovaných řetězců matematických úloh (viz [12, str. 104–108]).

Analogie jako užitečné heuristické strategie pro řešení matematických úloh

Heuristickými strategiemi (*strategickými postupy*) se nazývají obecné, popř. specifické heuristické (objevitelské) metody řešení matematických problémů (úloh), které se cílevědomě používají zejména při řešení složitějších matematických úloh (viz např. knižní publikace [8] a [12, str. 94–104]).

Strategií analogie (*strategií založenou na analogii*) je nazývána specifická heuristická strategie řešení matematické úlohy, jež spočívá v tom, že se nejprve řeší vhodná jednodušší (snadněji řešitelná) úloha, jejíž řešení je pak inspirací pro řešení dané analogické matematické úlohy.

V následujících dvou příkladech ilustrujících použití strategie analogie nejprve rozřešíme planimetrické úlohy, jejichž řešení nám pak budou inspirací pro řešení jistých náročnějších analogických stereometrických úloh.

Příklad 1

Planimetrická úloha: Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a libovolný bod P uvnitř tohoto trojúhelníku nebo na jeho hranici. Nechť K, L, M jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany BC, CA, AB a $|PK|$, $|PL|$, $|PM|$ jsou po řadě vzdálenosti bodu P od stran BC, CA, AB, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ jsou délky těchto stran trojúhelníku ABC. Dokažte, že pak platí rovnost

$$a \cdot |PK| + b \cdot |PL| + c \cdot |PM| = 2S,$$

kde S je obsah trojúhelníku ABC.

Řešení. Pro vnitřní bod P trojúhelníku ABC je jeho obsah S roven součtu obsahů trojúhelníků PAB, PBC, PCA, tj. platí rovnost

$$\frac{1}{2}\,a \cdot |PK| + \frac{1}{2}\,b \cdot |PL| + \frac{1}{2}\,c \cdot |PM| = S$$

a odtud po vynásobení této rovnosti dvěma dostáváme dokazovanou rovnost. Speciálně pro bod P na hranici trojúhelníku ABC jsou příslušné výrazy na levé straně této rovnosti nulové.

Analogická stereometrická úloha: Je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod P uvnitř tohoto čtyřstěnu nebo na jeho hranici. Nechť K, L, M, N jsou po řadě paty kolmic z bodu P na stěny ABC, BCD, CDA, ABD a $|PK|$, $|PL|$, $|PM|$, $|PN|$ jsou po řadě vzdálenosti bodu P od těchto stěn a S_1, S_2, S_3, S_4 jsou jejich obsahy. Dokažte, že pak platí rovnost

$$S_1 \cdot |PK| + S_2 \cdot |PL| + S_3 \cdot |PM| + S_4 \cdot |PN| = 3V,$$

kde V je objem čtyřstěnu $ABCD$.

Řešení. Pro vnitřní bod P čtyřstěnu $ABCD$ je jeho objem V roven součtu objemů čtyřstěnů $PABC$, $PBCD$, $PCDA$, $PABD$, tj. platí rovnost

$$\frac{1}{3}\,S_1 \cdot |PK| + \frac{1}{3}\,S_2 \cdot |PL| + \frac{1}{3}\,S_3 \cdot PM| + \frac{1}{3}\,S_4 \cdot |PN| = 3V$$

a odtud po vynásobení této rovnosti třemi dostáváme dokazovanou rovnost. Speciálně pro bod P na hranici čtyřstěnu $ABCD$ jsou příslušné výrazy na levé straně této rovnosti nulové.

Příklad 2

Vivianiho věta: Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a libovolný bod P uvnitř tohoto trojúhelníku nebo na jeho hranici. Nechť K, L, M jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany BC, CA, AB, $a = |BC| = |CA| = |AB|$ je délka strany rovnostranného trojúhelníku ABC. Pak součet vzdáleností bodu P od stran trojúhelníku ABC je konstantní a platí rovnost

$$|PK| + |PL| + |PM| = h,$$

kde h je výška rovnostranného trojúhelníku ABC. Dokažte.

Důkaz této věty je speciálním případem řešení důkazové planimetrické úlohy z příkladu 1. Dokazovanou rovnost dostáváme speciálně pro rovnostranný trojúhelník ABC, kde $a = b = c$, $S = \frac{1}{2}ah$.

Poznámka. Vincenzo Viviani [vinčenco viviani] (1622–1703) byl italský fyzik a matematik, jehož učiteli, spolupracovníky a příteli byli významní italští fyzikové a matematici Galileo Galilei (1564–1642) a Evangelista Torricelli (1608–1647). *Vivianiho větu* obsahuje jeho geometrická práce z roku 1659.

Analogická stereometrická věta k Vivianiho větě: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ a libovolný bod P uvnitř tohoto čtyřstěnu nebo na jeho hranici. Nechť K, L, M, N jsou po řadě paty kolmic z bodu P na stěny ABC, BCD, CDA, ABD, $|PK|$, $|PL|$, $|PM|$, $|PN|$ jsou po řadě vzdálenosti bodu P od těchto stěn, a je délka hrany pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Pak součet vzdáleností bodu P od stěn čtyřstěnu $ABCD$ je konstantní a platí rovnost

$$|PK| + |PL| + |PM| + |PN| = h,$$

kde h je výška pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte.

Důkaz této věty je speciálním případem řešení důkazové stereometrické úlohy z příkladu 1. Z něho speciálně pro pravidelný čtyřstěn $ABCD$, u něhož je $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$, $V = \frac{1}{3}S_1h$, takže platí

$$S_1 \cdot (|PK| + |PL| + |PM| + |PN|) = 3 \cdot \frac{1}{3}\, S_1h$$

a odtud plyne dokazovaná rovnost.

Příklad 3

Planimetrická úloha: V rovině je dán libovolný středově souměrný rovinný obrazec a bod $P \neq S$ (kde S je střed souměrnosti obrazce). Nalezněte přímku p, která prochází bodem P a rozděluje daný obrazec na dva shodné geometrické útvary.

Řešení je velmi jednoduché. Protože rovinná středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení, bezprostředně odtud plyne, že každá přímka procházející středem souměrnosti S daného obrazce jej rozdělí na dva shodné geometrické útvary. A tedy hledanou přímkou p je přímka PS (určená body P a S).

Analogická stereometrická úloha: V prostoru je dáno libovolné středově souměrné těleso a přímka p, která neprochází jeho středem souměrnosti S. Nalezněte rovinu ϱ, která prochází přímkou p a rozděluje dané těleso na dva shodné geometrické útvary.

Řešení je opět velice jednoduché: Protože také v prostoru středová souměrnost se středem S je shodné zobrazení, vyplývá odtud, že každá rovina procházející středem souměrnosti S daného obrazce jej rozdělí na dva shodné geometrické útvary. A tedy hledanou rovinou ϱ je rovina pS (určená přímkou p a bodem S).

Poznámka. G. Pólya v [1, str. 110] zdůrazňuje, že je vhodnější řešit takto formulovanou úlohu pro obecné středově souměrné těleso, než jen např. pro pravidelný osmistěn. Její řešení speciálně platí pro libovolný středově souměrný pravidelný mnohostěn.

Příklad 4

Pozoruhodné, i když málo známé, jsou *stereometrické analogie Pythagorovy věty a Thaletovy věty*, s nimiž se lze seznámit v zajímavém článku [9].

Užití analogií při řešení aplikačních úloh

Reálný svět a jeho zkoumání, jakož i veškeré lidské činnosti v něm jsou často natolik složité a bezprostředně těžko proveditelné, že vyžadují vytváření různých materiálních či abstraktních (myšlenkových, kognitivních) modelů. Připomeňme (viz [12, str. 111–114]):

Modelem daného objektu (resp. jevu, procesu, situace) nebo systému se rozumí jeho vhodná reprezentace (zastoupení, resp. zobrazení v širokém slova smyslu) se zachováním podstatných charakteristických vlastností.

Procesy vytváření, přeměňování a interpretování modelů se nazývají *modelování* či *simulace*. Velmi významným speciálním případem abstraktních modelů jsou matematické modely, tj. modely vyjádřené matematickými prostředky (např. rovnicemi nebo soustavami rovnic). Modelování užitím matematických modelů je nazýváno *matematické modelování*. Ve školské matematice se používají matematické modely při *matematizaci reálných situací* a *řešení aplikačních úloh*. Speciálně dvě nebo více aplikačních úloh, jež se řeší užitím stejného (resp. analogického) matematického modelu, se nazývají *analogické aplikační úlohy*.

Příklad 5

Fyzikální úloha o výpočtu průměrné rychlosti automobilu: Automobil ujel vzdálenost 210 km za 2,5 hodiny. Stanovte jeho průměrnou rychlost na celé trati.

Řešení. Při výpočtu průměrné rychlosti obecně nerovnoměrného pohybu automobilu vycházíme z její definice známé z fyziky. *Průměrná rychlost* nerovnoměrného pohybu tělesa („hmotného bodu“) na dráze s uražené za čas t je definována vzorcem

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s}{t},$$

tj. je rovna rychlosti takového modelu rovnoměrného pohybu tělesa, při kterém by těleso urazilo stejnou celkovou dráhu s za tutéž dobu t. Odtud pro zadané numerické hodnoty dráhy $s = 210$ km a času $t = 2{,}5$ h dostáváme, že průměrná rychlost automobilu byla

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{210\ \mathrm{km}}{2{,}5\ \mathrm{h}} = 84\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}.$$

Poznámka. Protože průměrnou rychlost automobilu počítáme jako podíl ujeté dráhy s a doby t, za kterou byla ujeta, je zřejmé, že při každém zdržení, tj. prodloužení doby t, se průměrná rychlost sníží.

Analogická aplikační úloha o výpočtu průměrné spotřeby automobilu: Auto ujelo 420 km a spotřebovalo při tom 29 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km?

Řešení. Vzhledem k tomu, že jízda automobilu je zpravidla nerovnoměrná, jeho spotřeba pohonných hmot (benzínu, nafty) je pak též nerovnoměrná v průběhu jízdy. Přitom *spotřebou motorového vozidla* se rozumí objem V spotřebované pohonné hmoty (paliva motoru) vyjádřený v litrech. Pro vyjádření ekonomičnosti a cenové náročnosti provozu motorového vozidla je zaveden a používán údaj tzv. *průměrné spotřeby motorového vozidla* na 100 km jízdy. Jeho definice vychází z toho, že se skutečný (nerovnoměrný) pohyb vozidla nahradí modelem rovnoměrného pohybu vozidla se spotřebou V paliva přímo úměrnou dráze s ujeté vozidlem: $V = ks$, kde konstanta k je koeficient této přímé úměrnosti ($k = \frac{V}{s}$ představuje spotřebu paliva na 1 km). Spotřeba paliva na dráze 100 km je pak $\frac{V}{s} \cdot 100$ km. Na základě tohoto matematického modelu se pro spotřebu paliva při jeho skutečné (nerovnoměrné) jízdě vozidla zavádí pojem průměrné spotřeby paliva na 100 km jízdy takto: *Průměrná spotřeba* V_p *paliva motorového vozidla* (v litrech) na 100 km jízdy při jeho celkové spotřebě V (v litrech) na dráze s (v km) je definována vzorcem

$$V_\mathrm{p} = \frac{V}{s} \cdot 100\ \mathrm{km}.$$

(Lze ji též vyjádřit ve formě poměru $V_\mathrm{p} : V = 100\ \mathrm{km} : s$, tzv. trojčlenkou.) Odtud pro zadané numerické hodnoty dráhy automobilu $s = 420$ km a celkové spotřeby benzínu $V = 29$ l dostáváme, že průměrná spotřeba automobilu na dráze 100 km byla

$$V_\mathrm{p} = \frac{29\ \mathrm{l}}{420\ \mathrm{km}} \cdot 100\ \mathrm{km} \doteq 6{,}9\ \mathrm{l}.$$

V článku [11] byl popsán a doporučen alternativní postup řešení této úlohy (a dalších numericky zadaných úloh) založený na užití „strategie analogie“. Stručně lze tento postup řešení vyjádřit takto: V daném numerickém zadání řešené úlohy se číselné údaje nahradí vhodnými jednoduššími („přátelštějšími“) čísly. Nalezne se řešení úlohy s tímto zjednodušeným číselným zadáním. V nalezeném algoritmu jejího řešení se nahradí pozměněné číselné údaje původními číselnými údaji a tím se určí řešení úlohy v původním znění. Takto pro výše zadanou slovní úlohu o průměrné spotřebě automobilu se v článku [11] nejprve řeší „analogická úloha“ se vhodně zjednodušeným číselným zadáním: Auto ujelo 200 km a spotřebovalo při tom 16 l benzínu. Jaká byla jeho průměrná spotřeba na 100 km? Výsledek řešení této úlohy je zřejmý – průměrná spotřeba auta na 100 km činí 8 litrů benzínu, přičemž podle [11] jeho výpočet se dá zrekonstruovat takto:

$$\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8$$

a po návratu k původní úloze se ta vyřeší stejným způsobem:

$$\frac{29}{\frac{420}{100}} \doteq 6{,}9.$$

K tomuto postupu řešení připojme několik zásadních připomínek: Řešení úlohy pomocí analogie (založené na zjednodušení jejího číselného zadání) není žádnou její alternativní výpočetní metodou. Původní úloha i „analogická úloha“ jsou řešeny v podstatě toutéž výpočetní metodou. V případě úlohy o průměrné spotřebě auta na 100 km je metoda výpočtu založena na (výše popsaném) předpokladu přímé úměrnosti spotřeby auta a ujeté dráhy, přičemž výpočet průměrné spotřeby může být realizován různými ekvivalentními způsoby, např. užitím trojčlenky. Zápis výsledku výpočtu ve tvaru složeného zlomku je jen jedním z možných ekvivalentních vyjádření. Praktický výpočet řešení v „analogické úloze“ a v původní úloze se liší jen v tom, že zatímco v prvním případě se snadno provede zpaměti, ve druhém případě se obvykle uskuteční s použitím kalkulátoru. Zároveň je třeba zdůraznit, že v aplikačních úlohách se mají výpočty provádět nikoliv jen s číselnými hodnotami údajů (veličin), ale s hodnotami veličin, tj. včetně jejich jednotek. A ve výuce fyziky jsou žáci vedeni k tomu, aby řešení fyzikálních úloh prováděli nejprve obecně a teprve poté do obecného výsledku dosazovali dané numerické hodnoty veličin.

Při řešení aplikačních úloh užitím strategie analogie je vždy nutné analyzovat úlohu nejen z matematického hlediska, ale též ji správně interpretovat z aplikačního hlediska. V následujícím příkladu ilustrativně ukážeme, jak užití analogie nesprávné z tohoto hlediska vede k chybnému řešení aplikační úlohy. Úlohy z tohoto příkladu jsou obsaženy v 8. upraveném vydání knižní publikace *Běloun, F. a kol.*: Sbírka úloh z matematiky pro základní školu (Prometheus, Praha 2010) v kapitole o slovních úlohách na str. 113–115, výsledky úloh jsou uvedeny na str. 245.

Příklad 6

Slovní úloha o směsi čajů: Ze dvou druhů čaje v ceně 160 Kč a 220 Kč za 1 kilogram se má připravit 20 kg směsi v ceně 205 Kč za 1 kilogram. Kolik kilogramů každého druhu čaje bude třeba smíchat?

Řešení. Označíme hledané hmotnosti prvního a druhého čaje po řadě m_1, m_2, jejich dané ceny za 1 kilogram $c_1 = 160$ Kč/kg, $c_2 = 220$ Kč/kg, hmotnost směsi $m_3 = 20$ kg a její cenu za 1 kilogram $c_3 = 205$ Kč/kg. Sestavíme soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé m_1, m_2, z nichž první vyplývá z fyzikálního zákona zachování hmotnosti a druhá vyjadřuje, že součet celkových cen smíchávaných čajů má být roven celkové ceně jejich směsi:

$$m_1 + m_2 = m_3,$$
$$c_1 m_1 + c_2 m_2 = c_3 m_3$$

Řešením této soustavy rovnic dostáváme

$$m_1 = \frac{c_2 - c_3}{c_2 - c_1} m_3,$$
$$m_2 = \frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1} m_3$$

a odtud numericky po dosazení

$$m_1 = \frac{1}{4} \cdot 20 \text{ kg} = 5 \text{ kg},$$
$$m_2 = \frac{3}{4} \cdot 20 \text{ kg} = 15 \text{ kg}.$$

Analogická úloha o slitině kovů: Ze dvou kovů s hustotami 7,4 $\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ a 8,2 $\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ máme připravit 0,5 kg slitiny s hustotou 7,6 $\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Kolik gramů každého kovu je k tomu zapotřebí?

Řešení. Označíme hledané hmotnosti prvního a druhého kovu po řadě m_1, m_2, jejich hustoty $\rho_1 = 7{,}4\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, $\rho_2 = 8{,}2\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, hmotnost slitiny $m_3 = 500$ g a její hustotu $\rho_3 = 7{,}6\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. V citované sbírce úloh byla sestavena pro neznámé m_1, m_2 soustava dvou lineárních rovnic formálně analogického tvaru k rovnicím z předchozí úlohy:

$$m_1 + m_2 = m_3,$$
$$\rho_1 m_1 + \rho_2 m_2 = \rho_3 m_3$$

Řešením této soustavy rovnic pro neznámé m_1, m_2 obdobně jako v předchozí úloze dostáváme

$$m_1 = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1} m_3,$$
$$m_2 = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} m_3$$

a odtud numericky po dosazení

$$m_1 = \frac{3}{4} \cdot 500\ \mathrm{g} = 375\ \mathrm{g},$$
$$m_2 = \frac{1}{4} \cdot 500\ \mathrm{g} = 125\ \mathrm{g}.$$

Toto řešení (uvedené ve výsledcích sbírky úloh) je však chybné, protože pro slitiny (a pro roztoky) druhá z rovnic soustavy neplatí (nemá fyzikální smysl). Danou úlohu lze řešit prostředky školské matematiky pouze aproximativně tak, že druhou rovnici soustavy nahradíme přibližně platnou rovnicí pro objemy obou kovů a jejich slitiny V_1, V_2, V_3 :

$$m_1 + m_2 = m_3,$$
$$V_1 + V_2 = V_3, \text{ neboli } \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_3}{\rho_3}.$$

Řešením této soustavy rovnic pro neznámé m_1, m_2 dostáváme

$$m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_3} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1}\, m_3,$$
$$m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3} \cdot \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\, m_3$$

a odtud numericky po dosazení

$$m_1 \doteq 365{,}13\ \mathrm{g}, \quad m_2 \doteq 134{,}87\ \mathrm{g}.$$

Užití strukturních analogií ve výuce matematiky

Nechť jsou dány množiny M_1, M_2, jež mají po řadě odpovídající analogické vlastnosti v_1, v_2 čili jsou zadány dvě matematické struktury (M_1, v_1), (M_2, v_2). Jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení f množiny M_1 na množinu M_2, které zachovává jejich vlastnosti v_1, v_2, pak toto zobrazení f se nazývá *izomorfní zobrazení* nebo krátce *izomorfismus* a (M_1, v_1), (M_2, v_2) se nazývají *izomorfní matematické struktury* vzhledem k vlastnostem v_1, v_2. Pokud vlastnosti v_1, v_2 jsou v jistém smyslu analogické, potom izomorfní matematické struktury (M_1, v_1), (M_2, v_2) představují *strukturní analogie* mezi množinami M_1, M_2.

Speciálně se rozlišují dva typy izomorfismů:

1. Je-li $v_1 = R_1$ a $v_2 = R_2$, kde R_1 a R_2 jsou po řadě určité (dané) relace mezi prvky množin M_1 a M_2, pak jde o *izomorfismus f zachovávající relace R_1, R_2*.
2. Je-li $v_1 = O_1$ a $v_2 = O_2$, kde O_1 a O_2 jsou po řadě určité (dané) operace pro prvky množin M_1 a M_2, pak jde o *izomorfismus f zachovávající operace O_1, O_2*.

V následujících dvou příkladech uvedeme některé významné izomorfismy (strukturní analogie), které nalézají široké uplatnění ve školské matematice.

Příklad 7

Izomorfismus (strukturní analogie) zachovávající relace:

$(\mathbb{R}, R_1)$ a $(\mathbb{E}_1, R_2)$ kde R_1 je relace uspořádání ($\leq$) na množině $\mathbb{R}$ (oboru reálných čísel) a R_2 je analogická relace uspořádání na množině $\mathbb{E}_1$ (eukleidovském prostoru dimenze 1, tj. přímce),

$(\mathbb{R}, d(a,b))$ a $(\mathbb{E}_1, d(A,B))$, kde $d(a,b) = |a-b|$ je metrika v $\mathbb{R}$ a $d(A,B) = |AB|$ je metrika v $\mathbb{E}_1$; na obou těchto izomorfismech je založeno geometrické znázorňování reálných čísel na *číselné ose.*

$(\mathbb{R}^2, d(a,b))$ a $(\mathbb{E}_2, d(A,B))$, kde $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$, $d(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$ je metrika v $\mathbb{R}^2$ a $d(A,B) = |AB|$ je metrika v rovině $\mathbb{E}_2$.

$(\mathbb{R}^3, d(a,b))$ a $(\mathbb{E}_3, d(A,B))$, kde $a = [a_1, a_2, a_3]$, $b = [b_1, b_2, b_3]$, $d(a,b) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$ je metrika v $\mathbb{R}^3$ a $d(A,B) = |AB|$ je metrika v rovině $\mathbb{E}_3$.

Ve všech uvedených případech izomorfismů f přitom platí $d(a,b) = d(AB)$, tj. zobrazení f jsou *izometrická* a pomocí této izometrie se přechází od geometrického prostoru $\mathbb{E}_n$ k jeho aritmetickému modelu $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$), což je využíváno v analytické geometrii při souřadnicovém vyjádření bodů v rovině, resp. v prostoru.

Příklad 8

Izomorfismus (strukturní analogie) zachovávající operace:

$(\mathbb{R}^+, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +)$, kde $\mathbb{R}^+$ je množina všech kladných čísel s operací násobení a $\mathbb{R}$ obor reálných čísel s operací sčítání; tento izomorfismus f zřejmě reprezentuje *logaritmickou funkci.*

$(\mathbb{C}, +)$ a $(\mathsf{G}, +)$, kde $\mathbb{C}$ je obor komplexních čísel s operací sčítání a G je rovina se zavedenou kartézskou soustavou souřadnic bodů s definovanou operací jejich sčítání; na tomto izomorfismu f je založeno geometrické znázorňování komplexních čísel v *Gaussově rovině* G.

$(\boldsymbol{V}_g, +)$ a $(\boldsymbol{V}_a, +)$, kde $\boldsymbol{V}_g$ je vektorový prostor geometrických vektorů v rovině, resp. v prostoru s definovanou operací sčítání a $\boldsymbol{V}_a$ je vektorový prostor aritmetických vektorů dimenze 2, resp. 3, tj. $\boldsymbol{V}_a = \mathbb{R}^2$, resp. $\boldsymbol{V}_a = \mathbb{R}^3$ s definovanou operací sčítání; tento izomorfismus f je využíván v analytické geometrii lineárních geometrických útvarů.

Literatura

[1] *Pólya, G.*: How to Solve It – A new Aspects of Mathematical Methods. Princeton University Press, Princeton, 1945, 1957 (2. rozšířené vyd.), 2004, 2014. (Ruský překlad 1. vydání: Kak rešať zadaču, Učpedgiz, Moskva 1961. Český překlad 2. vydání v reedici z r. 2014: Jak to řešit? – Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod. MatfyzPress, Praha, 2016.)

[2] *Pólya, G.*: Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton University Press, Princeton, 1954. (Ruský překlad: Matěmatika i pravdopodobnyje rassužděnija. Nauka, Moskva, 1975.)

[3] *Erdnijev, P. M.*: Sravněnije i obobščenije při obučeniji matěmatike. Učpedgiz, Moskva, 1960.

[4] *Čerkasov, R. S., Stoljar, A. A. a kol.*: Metodika prepodavanija matěmatiki. Obščaja metodika. Prosveščenije, Moskva, 1985.

[5] *Ženčáková, R.*: Užití analogie v matematice. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fakultas Paedagogica, Math. II, 1988.

[6] *Odvárko, O. a kol.*: Metody řešení matematických úloh. SPN, Praha, 1990.

[7] *Křemen, J.*: Modely a systémy. Academia, Praha, 2007.

[8] *Kopka, J.*: Umění řešit matematické problémy. HAV, Praha, 2013.

[9] *Švrček, J.*: Prostorové analogie dvou planimetrických vět. MFI, roč. 23 (2014), č. 2, s. 81–85.

[10] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.

[11] *Eisenmann, P., Přibyl, J.*: Analogie – Užitečná heuristická strategie. Učitel matematiky, roč. 24 (2016), č. 3 (99).

[12] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část: Obecná didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.