České stopy v Matematickém klokanovi

VLADIMÍR VANĚK – PAVEL CALÁBEK – DAVID NOCAR

Univerzita Palackého v Olomouci

Matematický klokan je jednou z nejznámějších mezinárodních matematických soutěží pro žáky ZŠ a SŠ. Tato soutěž se liší od ostatních matematických soutěží jako je například Matematická olympiáda, Pythagoriáda atd. v několika aspektech. Tím nejvýznamnějším je její struktura. Lze říci, že oproti výše zmíněným soutěžím probíhá pouze jednokolově v předem stanovený den. Dále se zde nehodnotí postup, případně nalezení „nejelegantnějšího" řešení, ale pouze správný výsledek, který si navíc může soutěžící „tipnout" z nabízených odpovědí A, B, C, D a E, z nichž *právě jedna* je správná. Většina žáků se s ní setkává již na prvním stupni ZŠ a pravidelně se jí účastní až do posledních ročníků střední školy. Soutěž je rozdělena do šesti kategorií dle věku účastníků.

Poprvé si mohou zasoutěžit již děti druhých a třetích tříd základních škol – kategorie Cvrček, dále pak následují kategorie Klokánek (4.–5. třída), Benjamín (6.–7. třída), Kadet (8.–9. třída) a na středních školách Junior (1. a 2. ročník, resp. ekvivalentní ročníky víceletých gymnázií) a Student (3. a 4. ročník). Zadání Cvrčka obsahuje 18 úloh a jeho časová dotace je 60 minut. Kategorie Klokánek, Benjamín a Kadet obsahují 24 úloh a je pro ně vyhrazeno 60 minut na řešení plus 15 minut na administraci testu. Středoškolské kategorie mají také 24 úloh a časovou dotaci 75 + 15 minut. Soubor soutěžních úloh je rozdělen na třetiny dle obtížnosti, za které žáci mohou získat po řadě 3, 4, resp. 5 bodů. V případě chybné odpovědi je jim jeden bod odečten, pokud úlohu neřeší neztrácejí žádný bod. O dosažitelných bodových ohodnoceních pojednává podrobněji článek [4]. Aby ani soutěžící, který nevyřeší žádnou úlohu správně, nedosáhl záporného výsledku, vstupuje do soutěže s 18 (Cvrček), resp. 24 body (ostatní kategorie). Další podrobnosti je možno najít na internetových stránkách soutěže `www.matematickyklokan.net`.

V přípravě budoucích učitelů se poměrně často setkáváme se situací, kdy se studenti domnívají, že Matematický klokan je soutěží regionální, případně republikovou a její realizace se omezuje pouze na krátký časový úsek na začátku druhé třetiny měsíce března. V tomto článku bychom rádi uvedli vše na pravou míru a kromě historie celé mezinárodní soutěže se podívali i na několik vybraných úloh, kterými přispěli organizátoři z České republiky k jejímu celosvětovému úspěchu.

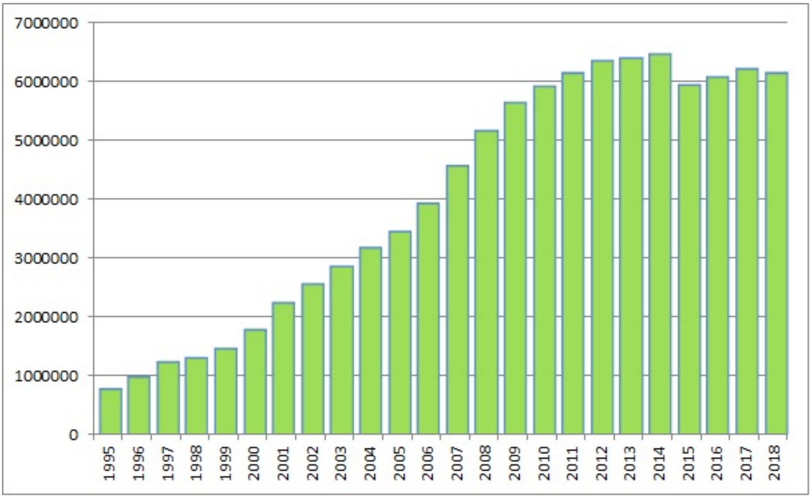
Historie Matematického klokana

Na začátku 80. let představil australský učitel matematiky *Peter O'Halloran* na australských školách nový druh matematické soutěže, jejímž základním stavebním prvkem byl didaktický test s výběrem odpovědí. Na testové otázky bylo možno odpovídat jednotně pomocí počítače, jímž byl celý test také opravován a vyhodnocován, což znamenalo, že se současně mohly účastnit soutěže tisíce žáků napříč Austrálií a jediným omezením bylo připojení k internetu. Ihned v počátcích tak slavila soutěž velký úspěch.

V roce 1991 se dva francouzští učitelé (*André Deledicq* a *Jean Pierre Boudine*) rozhodli po vzoru australského kolegy založit ve Francii podobnou soutěž, kterou nazvali „Kangaroo", čímž chtěli vzdát hold svým australským přátelům. V prvním ročníku se zúčastnilo 120 000 žáků ve věku 15–16 let. V následujících letech se soutěž otevřela i pro další věkové kategorie.

V červnu 1993 se v Paříži konalo setkání organizátorů francouzských matematických soutěží v rámci The World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC), kam byli pozváni také zástupci dalších evropských zemí. Zde byla mimo jiné představena soutěž Kangaroo. Účastníci konference byli ohromeni rostoucím zájmem žáků o tento typ soutěže (120 000 v roce 1991, 300 000 v roce 1992, 500 000 v roce 1993). Sedm evropských zemí – Bělorusko, Maďarsko, Nizozemsko, Polsko, Rumunsko, Rusko a Španělsko – převzalo myšlenku i způsob organizace a v květnu 1994 slavila nová soutěž ve všech zemích velký úspěch. Stále se však jednalo o individuální soutěže, které měly v jednotlivých zemích jiná zadání a také odlišný čas pro řešení. O měsíc později na zasedání Evropské rady ve Štrasburku valné shromáždění delegátů deseti evropských zemí rozhodlo o vytvoření asociace „Kangourou sans frontieres" (Kangaroo without Frontiers, AKSF) s volenou radou 6 členů a s právním statutem registrovaným v Paříži. Tím byl odstartován globalizační proces celé soutěže a nastavena základní pravidla platná pro všechny participující země.

Již v prosinci 1995 byl v Eindhovenu připravován další ročník soutěže, společný (identický) na úrovni kategorie Kadet (13–14 let) pro všechny země: byla stejná soutěžní zadání, časová dotace a soutěž se také konala ve všech zemích ve stejný den. Zajištění organizace, vyhodnocení soutěže i ocenění nejlepších řešitelů bylo ponecháno na jednotlivých zemích. Počínaje následujícím rokem byly již společně připravovány i ostatní věkové kategorie. V roce 1997 přijalo 21 zúčastněných zemí konečné nařízení, které přesně definuje finanční účast a pravidla soutěže, která mají být dodržována všemi zeměmi, jež se chtějí stát členy asociace Kangaroo without Frontiers. V současnosti je v asociaci registrováno 84 zemí z celého světa a soutěže se v roce 2018 ve všech kategoriích účastnilo 6 124 834 žáků.



Rozsáhlý a zajímavý je i seznam zemí AKSF: Albánie, Argentina, Arménie, Austrálie, Ázerbajdžán, Belgie, Bělorusko, Bolívie, Bosna a Hercegovina, Brazílie, Bulharsko, Chile, Filipíny, Kolumbie, Kostarika, Chorvatsko, Kypr, Česká republika, Dánsko, Dominikánská republika, Ekvádor, Estonsko, Etiopie, Finsko, Francie, Německo, Ghana, Řecko, Maďarsko, Indie, Indonésie, Írán, Irák, Izrael, Itálie, Jamajka, Jižní Korea, Kanada, Katalánsko, Kazachstán, Kosovo, Kyrgyzstán, Litva, Lotyšsko, Makedonie, Malajsie, Mexiko, Moldavsko, Mongolsko, Mosambik, Myanmar, Nigérie, Nizozemí, Norsko, Pákistán, Panama, Paraguay, Peru, Polsko, Portoriko, Portugalsko, Rakousko, Rumunsko, Rusko, Saudská Arábie, Singapur, Slovensko, Slovinsko, Spojené království, Srbsko, Španělsko, Švédsko, Švýcarsko, Tádžikistán, Tanzánie, Tunisko, Turecko, Ukrajina, Uruguay, USA, Uzbekistán, Venezuela, Vietnam, Zambie.

Historie českého Matematického klokana

Historie Matematického klokana v ČR se začala psát v roce 1994. Konference WFNMC se účastnili také dva členové katedry algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci Josef Molnár a Jaroslav Švrček. Usoudili, že v ČR podobný typ soutěže chybí a tak byl Matematický klokan J. Molnárem na podzim roku 1994 na konferenci MAKOS2014 vyhlášen i v České republice. Prvního ročníku v roce 1995 se účastnily pouze vybrané školy především z území dnešního Olomouckého a Moravskoslezského kraje, přesto se zapojilo téměř 25 000 žáků v kategoriích Klokánek (4. a 5. třída ZŠ), Benjamín (6. a 7. třída ZŠ), Kadet (8. a 9. třída ZŠ), Junior (1. a 2. ročník SŠ) a Student (3. a 4. ročník SŠ). Všechny kategorie měly strukturu 10+10+10 úloh a vyhrazený čas byl 75, resp. 90 minut (na SŠ). Změna nastala až v roce 2002, kdy se snížil počet úloh na dnešních $8 + 8 + 8$ a o tři roky později přibyla ještě kategorie Cvrček pro 2. a 3. třídu ZŠ se strukturou $4 + 4 + 4$.

V polovině letošního roku došlo pouze k administrativní úpravě, kdy nově nezastupuje Českou republiku v AKSF fyzická osoba (J. Molnár), ale osoba právnická (JČMF, pobočný spolek Olomouc), zastoupená Vladimírem Vaňkem.

V současné době tak soutěž pořádá pobočný spolek Olomouc Jednoty českých matematiků a fyziků ve spolupráci s Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci kategorie Klokánek, garant: Martina Uhlířová, kategorie Benjamín, garant: David Nocar, kategorie Kadet, garant: Jitka Hodaňová a Katedrou algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci kategorie Junior, garant: Vladimír Vaněk a kategorie Student, garant: Pavel Calábek. Pro žáky 2. a 3. třídy základní školy byla u nás v roce 2005 zavedena kategorie Cvrček (v roce 2012 se stala řádnou mezinárodní kategorií, od roku 2013 má strukturu $6 + 6 + 6$ a časovou dotací 60 minut), garant: Eva Nováková. Při organizaci soutěže dále pomáhají tzv. krajští a okresní důvěrníci a samozřejmě učitelé na školách.

Do tří let od uvedení do ČR byl Matematický klokan zařazen mezi soutěže, které jsou plně hrazeny z Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy. Jsme jednou z 15 zemí, kde účastníci neplatí žádné „startovné“.

Tabulka 1 uvádí vývoj počtu účastníků soutěže Matematický klokan v České republice a potvrzuje zájem žáků o tuto soutěž. Matematický klokan tak bezvýhradně plní své největší poslání a tím je propagace matematiky mezi dětmi a mládeží.

Tabulka 1: Vývoj počtu účastníků soutěže Matematický klokan v ČR

	Cvr.	**Klok.**	**Benj.**	**Kad.**	**Jun.**	**Stud.**	$\sum$
1995		6 205	7 834	7 280	2 195	1 297	24 811
1996		18 522	30 819	27 262	6 148	3 938	86 689
1997		61 161	59 314	51 769	8 631	7 349	188 224
1998		62 963	67 417	57 653	11 580	8 484	208 097
1999		87 885	79 717	73 578	16 847	6 606	264 633
2000		95 426	87 304	81 893	20 384	10 319	295 326
2001		93 434	86 458	78 408	20 173	11 228	289 701
2002		99 204	86 785	81 440	20 479	10 428	298 336
2003		83 584	74 112	65 839	19 615	9 879	253 029
2004		78 275	75 609	68 324	17 345	9 729	249 282
2005	11 076	70 886	72 090	69 425	18 333	10 690	252 500
2006	46 832	66 799	69 739	69 104	18 003	9 947	280 424
2007	60 744	70 705	66 840	71 491	17 804	10 274	297 858
2008	70 942	74 668	64 995	69 734	19 101	10 191	309 631
2009	70 084	75 624	64 258	65 694	18 711	10 599	304 970
2010	78 291	81 737	66 731	63 412	18 711	9 646	318 528
2011	79 758	84 031	65 461	60 404	16 326	8 721	314 701
2012	84 221	87 324	67 750	61 010	15 021	8 987	324 313
2013	86 011	86 065	67 794	59 408	15 503	8 243	323 024
2014	97 478	94 528	69 635	61 244	15 479	7 900	346 264
2015	102 346	96 763	71 120	64 074	15 559	7 894	357 756
2016	109 187	105 668	74 113	62 953	16 002	8 115	376 038
2017	115 925	111 013	75 330	65 443	16 326	7 568	391 605
2018	115 120	117 232	80 227	66 405	15 233	7 051	401 268

Další zajímavostí může být porovnání počtu účastníků soutěže mezi Českou republikou a vybranými státy. Do srovnání jsme zařadili jednak naše nejbližší sousedy, ale také státy, které stály u počátků rozšíření soutěže do Evropy v roce 1994. Měly tak stejnou dobu na její propagaci mezi žáky. Uvádíme zde jednak absolutní hodnoty, které mají ovšem menší vypovídající hodnotu, neboť 400 000 účastníků v desetimilionové ČR nelze srovnat se 400 000 účastníky například v Rusku, také počet obyvatel daného státu a poměrné zastoupení soutěžících ku počtu obyvatel v procentech (údaje byly převzaty z `wikipedia.com`).

Tabulka 2: Porovnání počtu účastníků soutěže mezi ČR a vybranými státy

stát	**počet soutěžících**	**počet obyvatel**	**poměrné zastoupení**
Francie	322 100	65 605 000	0,491 %
Rusko	1 159 571	142 423 773	0,814 %
Bělorusko	144 416	9 461 800	1,526 %
Maďarsko	39 314	9 957 731	0,395 %
Polsko	371 338	38 533 789	0,964 %
Rumunsko	17 321	19 043 767	0,091 %
Nizozemí	132 502	16 778 806	0,790 %
Španělsko	153 853	47 265 321	0,326 %
Česká republika	401 268	10 553 843	3,802 %
Slovensko	65 580	5 412 008	1,212 %
Německo	910 700	81 993 000	1,111 %
Rakousko	120 315	8 488 511	1,417 %

Relativní hodnoty řadí ČR na přední místa ve světě a pokud bychom porovnali naše výsledky se všemi členy asociace KSF, jsme na druhém místě. Předčili nás pouze soutěžící ze Slovinska, kterých bylo v letošním roce pouze 87 551, ale ve srovnání s populací jde o 4,235% zastoupení. O popularitě soutěže svědčí například fakt, že kategorie Klokánek se v roce 2018 účastnil téměř každý druhý žák čtvrté, resp. páté třídy ZŠ.

Matematický klokan v průběhu roku

Jak už bylo v úvodu naznačeno, mohlo by se zdát, že Matematický klokan je jednodenní záležitostí, kdy vše proběhne v třetí pátek měsíce března. To je ovšem pouze vyvrcholení. Příprava každého ročníku probíhá průběžně celý rok. Postupně se ustálilo následující schéma. Nejprve v období července a srpna organizátoři ze všech zemí předkládají individuálně na zabezpečeném serveru návrhy tzv. „klokanských“ úloh, a to v anglickém jazyce. Ty by měly splňovat následující podmínky:

- jsou přiměřené věku řešitelů,
- musejí zaujmout, být motivující,
- nejedná se o typicky školské úlohy,
- pro jejich řešení není potřeba znalosti složitého matematického aparátu, stačí školské znalosti a dobrý nápad, tzn. existuje velmi krátké a elegantní řešení,
- na jejich vyřešení postačí nejvýše 5 minut, tříbodové je možné většinou řešit tzv. „z hlavy“,
- lze je formulovat jako úlohu s výběrem odpovědi,
- zadání musí být jednoznačné a co nejkratší.

V průběhu září probíhá tzv. rating, kdy jednotlivé země mohou hodnotit navržené úlohy (v každé kategorii se obvykle objeví 120–250 návrhů úloh). Hodnotí se náročnost úlohy, přiměřenost vzhledem ke kategorii a bodovému přiřazení, „klokanskost“, tedy vhodnost pro soutěž. Ke každé úloze lze také dopsat komentář, zda v dané zemi již mají žáci dostatečné znalosti pro její řešení, případně návrh na její upřesnění.

V říjnu pak vybraný člen asociace uspořádá pětidenní setkání zástupců všech zemí spolu se zasedáním valného shromáždění Asociace Kangaroo without frontiers. Primárním účelem setkání je výběr konkrétních úloh pro jednotlivé soutěžní kategorie. Zpravidla se vybírá 30 úloh plus 5 náhradních (v kategorii Cvrček 24). Při výběru se přihlíží jednak k ratingu, ale také k učebním osnovám jednotlivých zemí. Jde o to, aby žáci stejného věku a stejného stupně vzdělání nedostali typy příkladů na učivo, které se ještě neučili. Žáci by tedy nebyli schopni takové příklady vyřešit a vůči vrstevníkům z jiných států by byli znevýhodněni. Proto má každá země možnost vypustit či změnit některé úlohy, a tím se vyhnout zmíněnému problému. Úlohy jsou seřazeny dle obtížnosti a zástupci anglicky mluvících zemí provedou jazykovou korekturu. Poslední den setkání je věnován administrativním záležitostem asociace a vybere se země, která bude pořádat další setkání o dva roky později.

Do konce listopadu probíhá (mezinárodně) především grafická úprava jednotlivých úloh tak, aby každoročně k 1. prosinci byla soutěžní zadání ve finální anglické podobě. Mnoho zemí tak má již na začátku prosince úlohy připraveny. U nás je ještě nutné úlohy přeložit do českého jazyka, o což se starají garanti jednotlivých kategorií, případně je potřeba upravit i obrázky, které se v úlohách objevují tak, aby vyhovovaly českým pravidlům a zvykům.

Zpravidla v polovině ledna je pořádán čtyřdenní workshop Klokani v Jeseníkách, kde skupina učitelů ZŠ a SŠ a pořadatelů z Univerzity Palackého připravuje finální verzi českého zadání Matematického klokana. Důraz je kladen na správnou formulaci jak z pohledu matematického a lingvistického, tak z pohledu porozumění úloze vzhledem k věku řešitele. Všechny úlohy se znovu přepočítávají a kontroluje se i vhodnost distraktorů. Z oficiální mezinárodní sady třiceti úloh je vybrána sestava 24 úloh (u kategorie Cvrček 18 ze 24 úloh). Do poloviny února zapracují garanti připomínky a soutěžní zadání jsou tak připravena pro distribuci na jednotlivé školy, která probíhá dva až tři týdny před konáním samotné soutěže. Správné výsledky jsou pak zveřejněny až v odpoledních hodinách v den konání soutěže.

Jakmile proběhne soutěžní den (je stanoven centrálně), na všech školách začíná období oprav a vyhodnocení. V tomto čase je využita struktura okresních a krajských důvěrníků a především práce učitelů na školách. Ti nejprve opraví jednotlivé úlohy v rámci tříd, resp. školy. Informace o počtu řešitelů a nejlepších řešitelích zasílají okresnímu důvěrníkovi, který sbírá údaje ze všech zapojených škol v bývalých okresech. Vybere z nich nejlepší řešitele a data předává krajskému důvěrníkovi, který je zpracuje v rámci kraje a odešle do konce května vedení soutěže na Univerzitu Palackého. Zde dojde k vyhodnocení soutěže za celou republiku a zveřejnění výsledků, připraví se diplomy i věcné ceny a vše se odešle vítězům ještě před koncem školního roku. V tuto dobu již autoři úloh vkládají své návrhy na další ročník soutěže Matematický klokan.

V některých zemích se v průběhu prázdnin ještě pořádají tábory nejlepších řešitelů, které jsou tematicky zaměřeny na řešení zajímavých matematických problémů. Česká republika sama žádný takový tábor nepořádá (na druhou stranu nevybírá startovné), ale pravidelně vysílá vybrané řešitele na mezinárodní tábor pořádaný organizátory Matematického klokana v Německu.

České stopy

Hlavním cílem organizátorů při mezinárodním setkání je vybrat co nejlepší sestavu úloh, které odpovídají znalostem a vědomostem řešitelů. Přitom ovšem v dobrém probíhá mezi jednotlivými zeměmi další soutěž o to, kolik jimi navržených úloh se nakonec dostane do finální verze zadání. Jsou zde udělovány diplomy ve třech disciplínách: nejvíce zaslaných návrhů, nejvíce vybraných úloh a nejlepší poměr mezi počtem vybraných a zaslaných úloh. Právě v této poslední disciplíně jsme v roce 2018 získali bronzovou medaili.

Soutěžní úlohy s výběrem odpovědí, mezi něž se řadí i ty klokanské, lze řešit v podstatě následujícími způsoby:

- Tipem s pravděpodobností 20 % na úspěch – samozřejmě se nejedná námi preferovaný způsob. Proto se snažíme v rámci úloh přiřazovat správné výsledky distraktorům A, B, C, D a E tak, aby celkové rozložení správných výsledků bylo co nejobecnější. Podrobněji o strategii tvorby odpovědí a s nimi spojené statistice bude pojednávat článek, který bude publikován v některém z následujících vydáních MFI.
- Správným vyřešením úlohy.
- Postupným vyzkoušením jednotlivých distraktorů a nalezením toho vyhovujícího – nelze využít u všech typů úloh.
- Eliminaci nesprávných/nevyhovujících distraktorů na základě dalších atributů – např. pomocí rozměru (jednotek objemu, obsahu apod.), viz následující úlohu.
- Využitím znalosti, že správná odpověď je právě jedna. Eliminací nesprávných distraktorů, které se navzájem nevylučují.

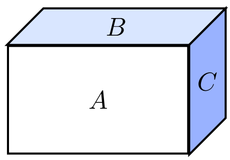
Student (2018, 9)

Obsahy stěn kvádru na obrázku jsou A, B, C. Vypočtěte jeho objem.

(A) ABC (B) $2(A+B+C)$

(C) $\sqrt{AB+BC+CA}$ (D) $\sqrt[3]{ABC}$

(E) $\sqrt{ABC}$



Komentář: Pro jednoduché řešení si stačí uvědomit, že obsah je uváděn v jednotkách čtverečních a objem v jednotkách krychlových. Hledejme proto z nabízených distraktorů ty, které budou odpovídat jednotkám krychlovým. Můžeme vyloučit odpověď (A), prostý součin obsahů (jednotka na šestou), ale také (B), (C) a (D), neboť všechny výpočty vedou na výsledky s jednotkami čtverečními. Správně tak může být pouze odpověď (E).

České úlohy v Matematickém klokanovi

Z desítek vybraných úloh českých autorů uveďme jen některé z posledních let. Tyto úlohy je možno řešit často různými způsoby.

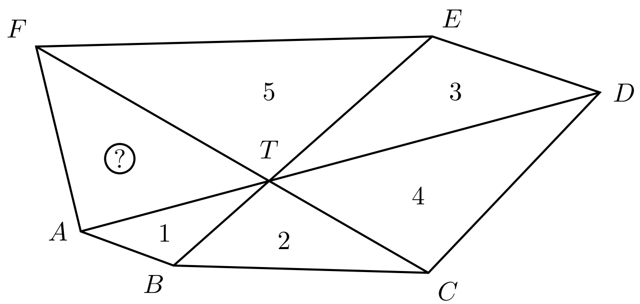
Junior (2018, úloha č. 21, autor J. Švrček)
Každé z celých čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 napíšeme právě do jednoho pole tabulky 2×3 (dva řádky, tři sloupce). Kolika různými způsoby lze čísla zapsat do této tabulky tak, aby součet čísel v každém řádku a v každém sloupci byl dělitelný třemi?

(A) 36 (B) 42 (C) 45 (D) 48 (E) jiné číslo

Řešení: Vzhledem k požadavku dělitelnosti součtu čísel v jednotlivých sloupcích třemi, může být ve sloupci s 1 pouze 2 nebo 5. Obdobně s 2 pouze 1 nebo 4, s 3 jen 6 atd. Chceme-li do prázdné tabulky umístit např. 1, můžeme to udělat právě *šesti* způsoby. Do stejného sloupce pak můžeme umístit jen 2 nebo 5, tedy máme *dvě* možnosti. Zvolme 2. Číslo 3 lze do prázdných políček umístit *čtyřmi* způsoby a spolu s ním může být v příslušném sloupci pouze číslo 6. Pozice zbývajících čísel je pak určena jednoznačně. Podle kombinatorického pravidla součinu je pak počet možných rozmístění čísel roven $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$.

Student (2001, úloha č. 30, autor J. Švrček)
Úhlopříčky AD, BE, CF konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ se protínají ve společném bodě T. Jestliže čísla v trojúhelnících udávají jejich obsah, pak obsah trojúhelníku FAT je:

(A) $\frac{6}{5}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{24}{5}$ (E) jiný



Řešení: Nechť P_{XYZ} znamená obsah trojúhelníku XYZ. Potom platí

$$P_{ABT} = \frac{|AT| \cdot |BT| \sin |\sphericalangle AB|}{2}, \quad P_{DET} = \frac{|DT| \cdot |ET| \sin |\sphericalangle DE|}{2},$$

$$P_{BCT} = \frac{|BT| \cdot |CT| \sin |\sphericalangle BC|}{2}, \quad P_{EFT} = \frac{|ET| \cdot |FT| \sin |\sphericalangle EF|}{2},$$

$$P_{CDT} = \frac{|CT| \cdot |DT| \sin |\sphericalangle CD|}{2}, \quad P_{FAT} = \frac{|FT| \cdot |AT| \sin |\sphericalangle FA|}{2},$$

přitom

$$|\sphericalangle AB| = |\sphericalangle DE|, \quad |\sphericalangle BC| = |\sphericalangle EF| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CD| = |\sphericalangle FA|.$$

Proto

$$P_{ABT} \cdot P_{CDT} \cdot P_{EFT} = P_{BCT} \cdot P_{DET} \cdot P_{FAT}.$$

Odtud již snadno určíme

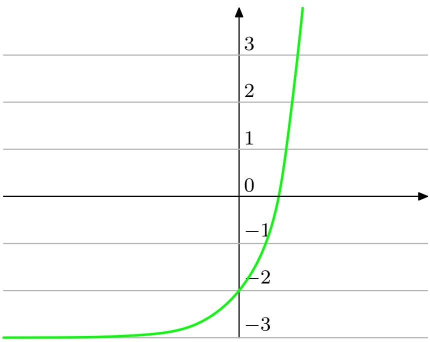
$$P_{FAT} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{10}{3}.$$

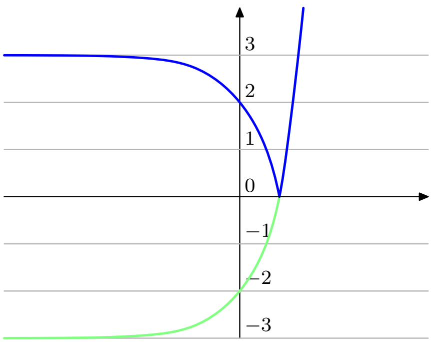
Student (2018, úloha č. 22, autor P. Calábek)
Kolik reálných řešení má rovnice

$$\big||4^x - 3| - 2\big| = 1?$$

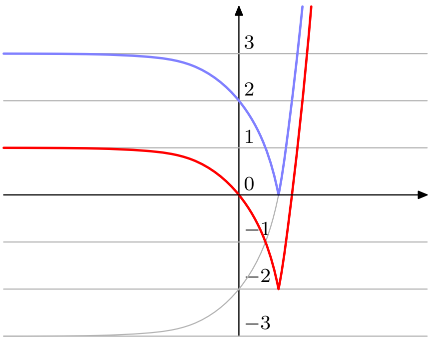
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

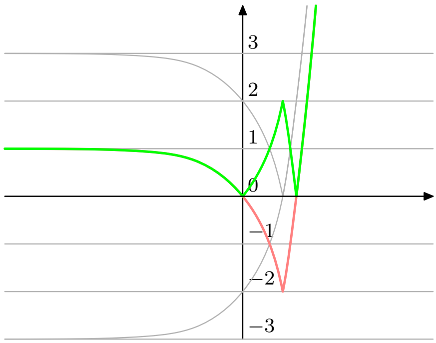
Řešení: Úlohu můžeme řešit graficky. Postupně sestrojujeme graf funkce na levé straně. Zeleně je znározněn na následujícím obrázku graf funkce $4^x - 3$. Na dalším obrázku je modrý graf funkce $|4^x - 3|$.



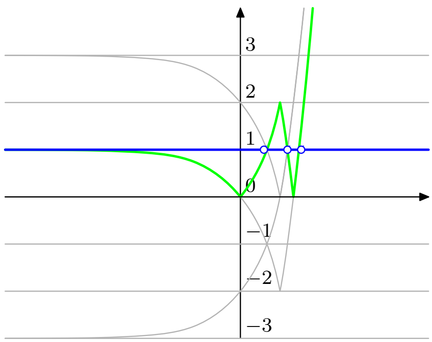


Vertikálním posunutím sestrojíme červený graf funkce $|4^x - 3| - 2$. A konečně zelený graf funkce $\big||4^x - 3| - 2\big|$.





Zadanou úlohu nyní řešíme graficky (přímka $y = 1$ je znázorněna modře) a vidíme, že úloha má právě tři řešení.



Jiné řešení: Z rovnice

$$\big||4^x - 3| - 2\big| = 1$$

plyne

$$|4^x - 3| = 2 \pm 1,$$

proto

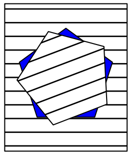
$$4^x = 3 \pm (2 \pm 1) \in \{0, 2, 4, 6\}.$$

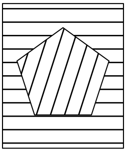
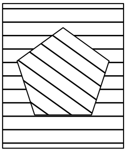
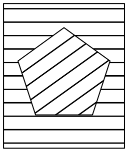
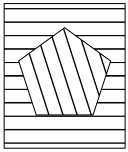
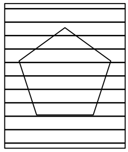
Jelikož $4^x > 0$, mají tyto rovnice právě tři řešení:

$$x_1 = \log_4 2 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \log_4 4 = 1, \quad x_3 = \log_4 6 \doteq 1{,}292.$$

Student (2018, úloha č. 16, autor P. Calábek)

Z linkovaného listu papíru jsme vystřihli pravidelný pětiúhelník. V každém kroku jej otočíme proti směru hodinových ručiček kolem jeho středu o 21°. Na obrázku vpravo je situace po prvním kroku. Který obrázek znázorňuje situaci, kdy pětiúhelník poprvé zapadne do vystřiženého otvoru?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení: Pravidelný pětiúhelník zapadne do vystřiženého otvoru, právě když se otočí o celý násobek pětiny plného úhlu, tedy o celý násobek 72°. Do vystřiženého otvoru zapadne poprvé, pokud se otočí (ve stupňové míře) o nejmenší společný násobek $72 = 2^3 \cdot 3^2$ a kroku $21 = 3 \cdot 7$, tedy o úhel (ve stupňové míře)

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504 = 360 + 144.$$

Pravidelný pětiúhelník tak vykoná jednu plnou otáčku a poté se otočí ještě o 144°. Když poprvé pětiúhelník zapadne do do vystřiženého otvoru, bude situace vypadat jako na obrázku (B).

Literatura

[1] *Association Kangourou sans Frontieres* [online]. Paříž, 2018 [cit. 3.9.2018]. Dostupné z: http://aksf.org/

[2] *Matematický klokan* [online]. Olomouc, 2018 [cit. 10.9.2018]. Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/

[3] *Mathematical Kangaroo* [online]. Paříž, 2018 [cit. 20.8.2018]. Dostupné z: https://ksf-support.org/Private/Default.aspx

[4] *Švrček, J.*: Bodové zisky v Matematickém klokanovi. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 78 (2001), č. 3.