Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 249 a 250 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 249

V rámci městského tanečního festivalu vstoupilo i pět dívčích tanečních kroužků: hanácký, valašský, romský, slovenský a ukrajinský. Vystoupení se velmi líbila, ale nešlo o soutěž. Jitka s Bětkou si však řekly, že si stanoví výsledné pořadí alespoň pro sebe. Začaly tím, že hanácký kroužek dají výš než valašský, a rovněž že romský dají výš než ukrajinský. V této chvíli je opusťme.

Stanovte, kolik je možných různých výsledných pořadí za těchto dvou zadaných podmínek, jestliže navíc uvážíme, že na některých místech může být i více než jeden kroužek.

Stanislav Trávníček

Úloha 250

Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod P, pro který platí $|AP| = 1$, $|BP| = 2$ a $|CP| = 3$. Dokažte, že bod P' souměrně sdružený s bodem P podle přímky AB leží na kružnici opsané čtverci $ABCD$.

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 245 a 246, jejichž zadání najdete ve třetím čísle tohoto (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 245

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná čísla x vyhovují rovnici

$$f(2x) + f(-2x) = x\bigl(f(3x) + x^3\bigr).$$

Józef Kalinowski (Kalety)

Řešení. Dosazením $x = 0$ dostaneme $2f(0) = 0$, tedy $f(0) = 0$. Nechť t je libovolné nenulové reálné číslo. V dané funkcionální rovnici položme nejprve $x = t$ a poté $x = -t$, dostaneme

$$f(2t) + f(-2t) = t\big(f(3t) + t^3\big),$$
$$f(-2t) + f(2t) = -t\big(f(-3t) - t^3\big).$$

Jelikož levé strany obou rovnic jsou stejné, dostaneme porovnáním jejich pravých stran po vydělení nenulovým číslem t rovnost $-f(3t) = f(-3t)$. Jelikož tato rovnost platí pro libovolné reálné číslo t (užitím již dokázaného $f(0) = 0$), plyne odtud, že funkce f je lichá.

Levá strana zadané rovnice je tak rovna 0 a proto pro $x \neq 0$ platí

$$f(3x) = -x^3,$$

což opět spolu s $f(0) = 0$ dává, že pro všechna reálná čísla x platí

$$f(x) = -\tfrac{1}{27}x^3. \tag{1}$$

Zkouškou snadno ověříme, že tato funkce je opravdu řešením dané funkcionální rovnice.

Tedy existuje jediná funkce f mající dané vlastnosti, je to funkce 1.

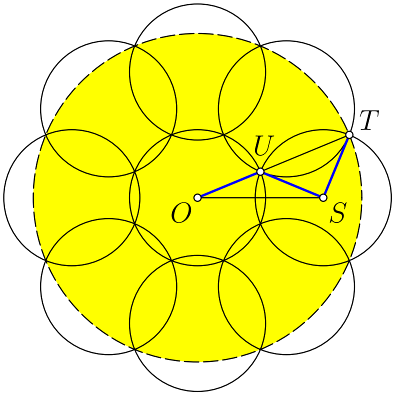
Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vojtěch David* z WG v Ostravě-Porubě, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Viktor Fukala* a *Jakub Petr*, oba z GJK v Praze 6, Parléřova, *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řečkovicích, *Adam Křivka* z CMGaSOPŠ v Brně, *Tomáš Křižák* z GMK v Bílovci, *Karolína Kučerová* z G v Českém Krumlově, *Lucie Kundratová* z GaJŠ ve Zlíně, *Tomáš Sourada* z G v Žamberku a *Petr Zahradník* z GaSOŠDVŠ v Ústí nad Labem.

Úloha 246

Kruhový terč s průměrem 12 zasáhlo 10 šípů. Rozhodněte, zda vzdálenost mezi každou dvojicí šípů může být aspoň 5.

Pavel Calábek

Řešení. Kolem kruhu s vhodně zvoleným průměrem d rovnoměrně rozmístěme 8 s ním shodných kruhů dle obrázku tak, aby pokrývaly celý terč s průměrem 12. Pokud ukážeme, že $d < 5$, budou podle Dirichletova principu aspoň dva z 10 šípů ležet uvnitř téhož kruhu a tedy jejich vzdálenost bude menší než 5.



Nyní nerovnost $d < 5$ dokážeme. Označme podle obrázku O střed terče a současně střed středního kruhu, S střed jednoho z krajních kruhů a U průsečík jejich hranic. Tento průsečík leží současně na hranici s ním sousedícího kruhu a druhý průnik jejich hranic označme T. Ze symetrie podle přímky OU plyne, že body O, U a T leží na téže přímce. Navíc platí $|OU| = |US| = |ST| = \frac{1}{2}d$. Z rovnoměrnosti rozmístění plyne, že velikost úhlu SOU je $\frac{1}{2\cdot 8}\,360° = 22{,}5°$, tedy velikost vnitřního úhlu při vrcholu U proti základně OS rovnoramenného trojúhelníku OUS je 145° a rovnoramenný trojúhelník UST je tak pravoúhlý. Odtud již plyne

$$\tfrac{1}{2}12 = |OT| = |OU| + |UT| = \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,d = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})d.$$

Dokazovaná nerovnost $d < 5$ je tak ekvivalentní po řadě s nerovnostmi

$$\begin{aligned} 12 &< (1+\sqrt{2})\,5 = 5 + 5\sqrt{2},\\ 7 &< 5\sqrt{2},\\ 7^2 = 49 &< 50 = 2\cdot 5^2. \end{aligned}$$

Protože poslední nerovnost platí, dokázali jsme, že pokud terč zasáhne alespoň deset šípů, vzdálenost mezi některými dvěma bude menší než 5.

Správná řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Viktor Fukala* a *Jakub Petr*, oba z GJK v Praze 6, Parléřova, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řečkovicích, *Adam Křivka* z CMGaSOPŠ v Brně, *Karolína Kučerová* z G v Českém Krumlově, *Lucie Kundratová* z GaJŠ ve Zlíně a *Tomáš Sourada* z G v Žamberku.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek