ZPRÁVY

12. středoevropská matematická olympiáda

Dvanáctý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se konal ve dnech 27. srpna až 2. září 2018 v polském městě Bielsko-Biała. Soutěže se zúčastnilo 66 žáků, mimo deseti tradičních zemí České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska se soutěže zúčastnili jako hosté také soutěžící z Ukrajiny. Každou zemi reprezentovala šestice žáků nematuritních ročníků středních škol, kteří se letos nezúčastnili Mezinárodní matematické olympiády.

České reprezentační družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola kategorie A 67. ročníku české MO. Nominováni byli dva vítězové a čtyři úspěšní řešitelé. Byli jimi *Jonáš Havelka* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řečkovicích, *Josef Minařík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Magdaléna Mišinová* z G v Praze 6, J. Keplera, *Jana Pallová* z GJŠ v Přerově, a *Tomáš Sourada* z G v Žamberku. Vedoucím české delegace byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Zatímco den po příjezdu se soutěžící seznamovali s historií a současností Bielska-Białe a připravovali se na soutěž, vedoucí družstev tvořící mezinárodní *jury* po vyčerpávajících jednáních vybrali 12 úloh (4 pro soutěž jednotlivců a 8 pro soutěž družstev), přeložili je do národních jazyků a připravili systém jejich hodnocení. Všechna pracovní jednání jury a vlastní soutěž probíhala na místní Humanitně-technické univerzitě. Ve středu 29. srpna proběhla soutěž jednotlivců a o den později i soutěž družstev. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh, opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako třetí úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha, jejímž autorem byl *Josef Tkadlec.* Dva následující dny po soutěži byl pro soutěžící připraven poznávací program po Krakově a okolních polských Beskydech. Vedoucí družstev mezitím opravili žákovská řešení a zkoordinovali jejich hodnocení. Po uzavření koordinací stanovila jury závěrečná pořadí obou soutěží a bodové hranice pro udělení medailí.

Večer 1. září se na zámku v Bielsku-Białe konal závěrečný slavnostní ceremoniál, kde organizátoři vyhlásili výsledky. V soutěži jednotlivců bylo osm soutěžících, kteří získali plný počet bodů, ohodnoceno zlatými medailemi (Polsko 3, Maďarsko 2, po jedné získalo Chorvatsko, Německo a Ukrajina), dalších dvanáct soutěžících získalo stříbrné medaile a šestnáct soutěžících bronzové medaile. Navíc 17 žáků obdrželo čestná uznání za úplné vyřešení aspoň jedné soutěžní úlohy. Je potěšitelné, že se mezi oceněnými byli i čeští žáci. *Magdaléna Mišinová* obsadila se ziskem 17 bodů dělené 34. místo a získala bronzovou medaili, *Josef Minařík* (15 b.) a *Jana Pallová* (14 b.) získali čestná uznání. V porovnání s minulými léty jsou tyto výsledky nepříliš uspokojivé a útěchou nemůže být ani 8. místo v soutěži družstev, i když oproti loňsku jsme se o dvě místa polepšili.

V soutěži družstev zvítězila Ukrajina (62 bodů), následována Chorvatskem (60 b.) a Německem (59 b.). České družstvo získalo 27 bodů a obsadilo 8. místo. Uveďme na závěr pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí, které vybojovala jednotlivá družstva v soutěži jednotlivců:

Česká republika (0–0–1), Chorvatsko (1–1–4), Litva (0–0–0), Maďarsko (2–1–2), Německo (1–1–1), Polsko (3–3–0), Rakousko (0–0–1), Slovensko (0–3–2), Slovinsko (0–0–2), Švýcarsko (0–0–1), Ukrajina (1–3–2).

Zájemci mohou získat podrobnější informace na internetových stránkách soutěže: http://www.memo2018.abel.bielsko.pl/

Na závěr uvádíme zadání všech dvanácti soutěžních úloh, za úlohou je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců

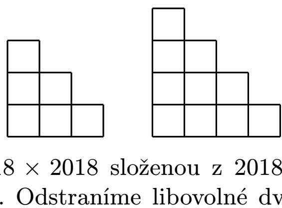
29. srpna 2018

1. Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všech kladných racionálních čísel a uvažujme $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}.$$

(*Rakousko*)

2. Následující dva obrazce sestávající po řadě ze 6 a 10 jednotkových čtverců nazveme *schůdky.*



Uvažujme tabulku 2018×2018 složenou z 2018^2 buněk, z nichž každá je jednotkovým čtvercem. Odstraníme libovolné dvě buňky z jednoho řádku. Dokažte, že zbytek tabulky nelze rozstříhat (po stranách buněk) na schůdky (libovolně otočené). (*Ukrajina*)

3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| < |AC|$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Dále označme R a Q po řadě těžiště trojúhelníků ABD a ACD. Nechť P je takový bod úsečky BC, že $P \neq D$ a body P, Q, R a D leží na téže kružnici. Dokažte, že se přímky AP, BQ a CR protínají ve společném bodě. (*Slovensko*)

4. a) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m existuje celé číslo $n \geq m$ takové, že

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

b) Označme $p(m)$ nejmenší celé číslo $n \geq m$, které vyhovuje rovnici $(*)$. Dokažte, že platí $p(2018) = p(2019)$.

Poznámka: Pro reálné číslo x značí $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo, které nepřevyšuje x. (*Slovensko*)

Soutěž družstev

30. srpna 2018

1. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

(*Polsko*)

2. Nechť $P(x)$ je mnohočlen stupně $n \geq 2$ s racionálními koeficienty, který má n různých reálných kořenů tvořících aritmetickou posloupnost. Dokažte, že mezi nimi lze nalézt dva, které jsou zároveň dvěma kořeny nějakého mnohočlenu stupně 2 s racionálními koeficienty. (*Rakousko*)

3. Tlupa pirátů se pohádala, a teď každý z nich míří pistolemi na další dva piráty. Postupně jsou všichni v určitém pořadí jeden po druhém vyvoláni. Jestliže vyvolaný pirát žije, vystřelí na oba piráty, na které mířil (a to i v případě, že jsou již mrtví). Každá střela je okamžitě smrtící. Po vyvoláni všech pirátů zjistíme, že jich bylo zastřeleno právě 28.

Dokažte, že i kdyby piráti byli vyvoláni v jakémkoliv jiném pořadí, bylo by jich zastřeleno aspoň 10. (*Česká republika*)

4. Pro přirozené číslo n uvažujme přirozená čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nepřevyšující 2^k pro některé přirozené číslo $k \geq 3$. *Reprezentací* nezáporného celého čísla t rozumíme takovou posloupnost nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, že platí

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n.$$

Dokažte tvrzení: Pokud má nezáporné celé číslo t nějakou reprezentaci, pak má také reprezentaci, ve které je méně než $2k$ z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenulových. (*Polsko*)

5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| < |AC|$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Body B' a C' leží po řadě na polopřímkách AB a AC tak, že body B', C' a D leží na téže přímce a body B, C, B' a C' leží na téže kružnici se středem O. Označme M střed úsečky BC a H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že $DHMO$ je rovnoběžník. (*Slovensko*)

6. Uvažujme trojúhelník ABC. Osa jeho vnitřního úhlu ABC protíná stranu AC v bodě L a dále kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě $W \neq B$. Kolmý průmět bodu K na přímku AW označme L. Kružnice opsaná trojúhelníku BLC dále protíná přímku CK v bodě $P \neq C$. Přímky BP a AW se protínají v bodě T. Dokažte, že platí $|AW| = |WT|$. (*Ukrajina*)

7. Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto:

$$a_1 = 1 \text{ a pro každé přirozené číslo } k \text{ je } a_{k+1} = a_k^3 + 1.$$

Dokažte, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné číslo, existuje takové přirozené číslo n, že p dělí a_n. (*Polsko*)

8. Celé číslo n nazveme *slezské*, jestliže existují přirozená čísla a, b a c tak, že

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

a) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých slezských čísel.
b) Dokažte, že existuje přirozené číslo, které není slezské.

(*Německo*)

Organizací příštího (13.) ročníku soutěže, který se uskuteční koncem srpna 2019, byla pověřena Česká republika.

Pavel Calábek

Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2018

Naši nejlepší řešitelé Matematické olympiády kategorie P (programování) se každoročně účastní dvou mezinárodních soutěží v informatice a programování. V roce 2018 se nejprve v první polovině srpna konala v polské Varšavě Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2018 (Central European Olympiad in Informatics), na začátku září se potom v japonském