MATEMATIKA

O spirální podobnosti

TOMÁŠ HRDLIČKA – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku, který je určen především středoškolským učitelům matematiky, kteří pracují s nadanými žáky, je prezentace *spirální podobnosti* – speciálního zobrazení v rovině složeného z otočení a stejnolehlosti. V článku jsou uvedeny některé její základní vlastnosti a dále aplikace při efektivním řešení některých určovacích a důkazových planimetrických úloh. Jeho významnou součástí je soubor řešených i neřešených úloh, které s danou tématikou úzce souvisejí. K pochopení uvedené problematiky nejsou potřebné znalosti přesahující rámec učiva středoškolské matematiky.

Definice (spirální podobnost)

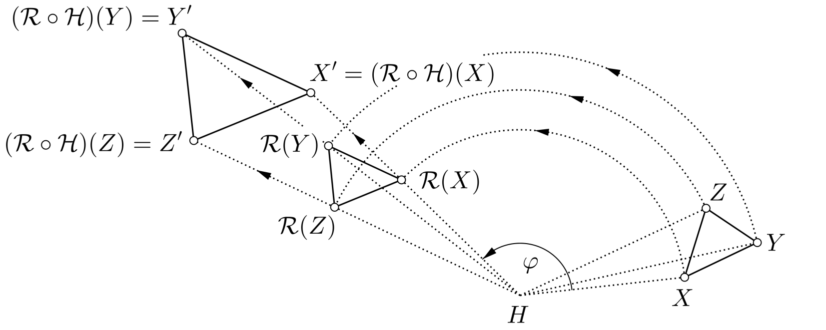
Nechť $\mathcal{R}(H,\varphi)$ je otočení v rovině se středem H a orientovaným úhlem φ a $\mathcal{H}(H,k)$ nechť je stejnolehlost v téže rovině se středem H a koeficientem $k \neq 0$. Složené zobrazení $\mathcal{R}(H,\varphi) \circ \mathcal{H}(H,k)$ nazýváme *spirální podobnost* a značíme jej $\mathcal{S}(H,k,\varphi)$. Bod H nazveme *středem spirální podobnosti.* Řekneme, že útvary U, U' jsou *spirálně podobné*, existuje-li spirální podobnost $\mathcal{S}$, která zobrazí útvar U na U', tj. $\mathcal{S}\colon U \to U'$ (obr. 1).

Spirální podobnost je tedy reprezentována uspořádanou trojicí (H,k,φ) a opačně – zadáním této trojice je spirální podobnost jednoznačně určena.

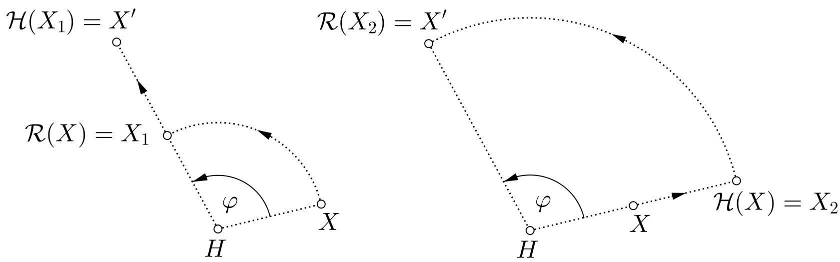
Poznámka 1. Protože složení stejnolehlosti a otočení (v rovině) s týmž středem je komutativní, tj. platí

$$\mathcal{H}(H,k) \circ \mathcal{R}(H,\varphi) = \mathcal{R}(H,\varphi) \circ \mathcal{H}(H,k),$$

lze spirální podobnost zavést analogicky s opačným pořadím obou skládaných zobrazení, viz obr. 2.



Obr. 1



Obr. 2

Poznámka 2. Každé dva *přímo podobné*[1)] útvary v rovině jsou zobrazeny jeden na druhý pomocí spirální podobnosti nebo posunutí. Uvedené tvrzení je možno najít např. v [1].

Vlastnosti spirální podobnosti

Spirální podobnost $\mathcal{S}(H, k, \varphi)$ je přímá podobnost a má tedy všechny vlastnosti podobných zobrazení. Jejím (jediným) samodružným bodem je střed H. Speciálními případy spirální podobnosti jsou tak

- stejnolehlost $\mathcal{H}(H, k)$, jestliže $\varphi = n \cdot 360°$, kde n je celé číslo;
- otočení $\mathcal{R}(H, \varphi)$, jestliže $k = 1$.

Následující tvrzení jsou často užívaná při řešení konkrétních úloh.

[1)] *Přímá podobnost* rovinných útvarů je definována analogicky jako přímá shodnost, tj. zachovává orientaci značení vrcholů libovolného trojúhelníku, viz např. [3].

Věta 1 (o jednoznačném určení spirální podobnosti)

Nechť A, B, C, D jsou po dvou různé body v rovině, které nejsou vrcholy rovnoběžníku. Pak existuje právě jedna spirální podobnost $\mathcal{S}$ taková, že $\mathcal{S}\colon A \to C$, $B \to D$ a $\overline{AB} \to \overline{CD}$.

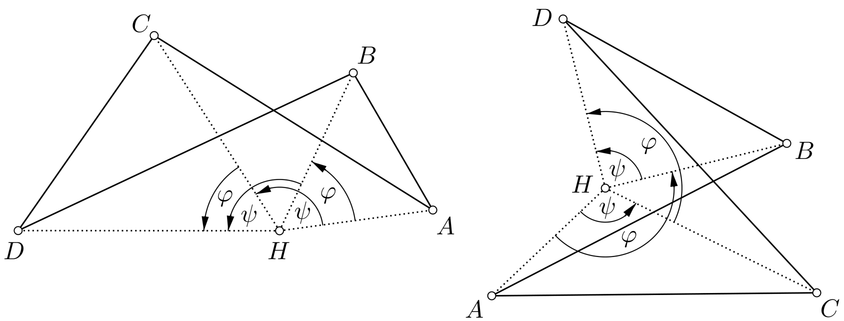
Důkaz tohoto tvrzení je možno najít např. v [4].

Poznámka 3. Tvrzení věty 1 lze rozšířit na všechny polohy bodů A, B, C, D v rovině s výjimkou případu, kdy $ABDC$ je rovnoběžník (v takovém případě je uvažované zobrazení posunutím, které není speciálním případem spirální podobnosti).

Následující dvě věty zde uvádíme bez důkazů. Zájemci z řad čtenářů mohou důkazy obou vět najít např. v [2].

Věta 2 (duplicita spirální podobnosti)

Nechť A, B, C, D jsou po dvou různé body v rovině a H bod této roviny takový, že spirální podobnost $\mathcal{S}$ se středem H zobrazuje úsečku AB na CD. Pak existuje spirální podobnost $\mathcal{S}'$ s týmž středem H zobrazující úsečku AC na BD (obr. 3).



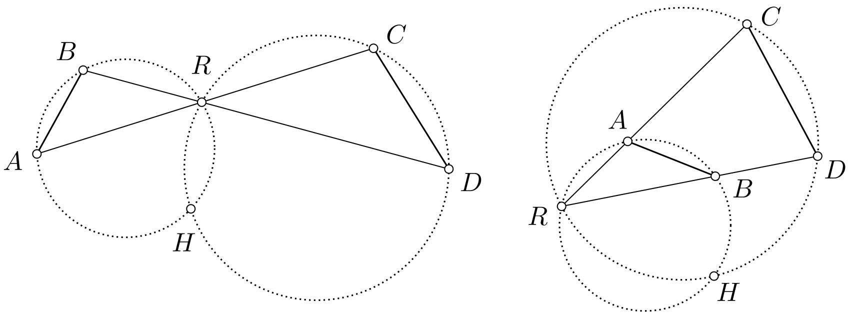
Obr. 3

Z praktického hlediska popisuje výše uvedená věta skutečnost, že ke každé spirální podobnosti zobrazující $\triangle HAB$ na $\triangle HCD$ existuje rovněž (jiná) spirální podobnost zobrazující $\triangle HAC$ na $\triangle HBD$. Na obr. 3 jsou uvedeny dva z možných případů polohy bodů A, B, C, D v rovině.

Následující věta poskytuje návod, jakým způsobem lze pro dva podobné útvary v rovině určit střed H spirální podobnosti, jež převádí jeden útvar na druhý.

Věta 3 (konstrukce středu spirální podobnosti)

Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník, v němž $AC \cap BD = \{R\}$. Střed spirální podobnosti zobrazující $\overline{AB}$ na $\overline{CD}$ je průsečík H ($H \neq R$) kružnic opsaných trojúhelníkům ABR a CDR. Mají-li tyto kružnice právě jeden společný bod (dotýkají-li se), pak $H = R$ (obr. 4).



Obr. 4

K předchozí větě uvádíme na obr. 4 dva případy čtyřúhelníků s vrcholy v bodech A, B, C, D. Uvedené poznatky jsou postačující pro řešení úloh prezentovaných v tomto článku, a můžeme tak přejít k reálným aplikacím spirální podobnosti.

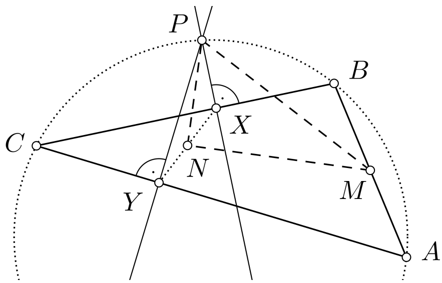
Aplikace spirální podobnosti při řešení konkrétních úloh

Dále prezentujeme praktické užití spirální podobnosti. Uvádíme čtyři řešené úlohy na které navazuje série úloh neřešených. K řešení užíváme vlastnosti uvedené výše a běžně známé geometrické vztahy.

Úloha 1

Je dán trojúhelník ABC a bod P ležící na oblouku kružnice opsané trojúhelníku ABC mezi vrcholy B a C, na kterém neleží vrchol A. Paty kolmic z bodu P k jeho stranám BC a AC označme po řadě X a Y. Je-li M střed úsečky AB a N střed úsečky XY (obr. 5), pak platí $|\sphericalangle MNP| = 90°$. Dokažte.

Řešení. Nejprve najdeme vhodnou spirální podobnost. Ze zadání plyne, že platí $|\sphericalangle PXB| = |\sphericalangle PYA|$. Navíc body A a B leží na oblouku kružnice nad úsečkou CP, tudíž $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$, proto jsou trojúhelníky BPX a APY podobné. Pak existuje právě jedna spirální podobnost $\mathcal{S}$ taková, že



Obr. 5

$\mathcal{S}\colon \overline{BX} \to \overline{AY}$ (viz věta 1). Využitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) existuje spirální podobnost $\mathcal{S}'\colon \overline{BA} \to \overline{XY}$. Ze zachování dělícího poměru též $M \to N$ v $\mathcal{S}'$, tedy i $\overline{BM} \to \overline{XN}$ v $\mathcal{S}'$. Opětovným užitím duplicity dostaneme $\mathcal{S}\colon \overline{BX} \to \overline{MN}$, z čehož plyne podobnost trojúhelníků BPX a MPN. Odtud je zřejmé, že $|\sphericalangle MNP| = 90°$, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 2

Čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ představují dvě mapy stejného území s různými měřítky. Čtverec $A'B'C'D'$ je vepsán do čtverce $ABCD$ a představuje mapu s menším měřítkem. Dokažte, že existuje právě jeden bod P v této rovině, který současně reprezentuje totéž místo na obou mapách a určete ho.

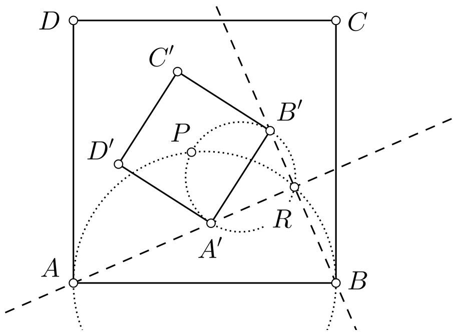
Řešení. Nejprve dokážeme existenci bodu P a jeho jednoznačnost. Mapy $ABCD$, $A'B'C'D'$ představují dva neshodné čtverce, tj. jsou spirálně podobné (viz pozn. 2). Všechna podobná zobrazení, která nejsou shodností, mají samodružný bod (a to jediný), kterým je zde právě bod P.

Polohu bodu P určíme pomocí věty 3. Z vlastností spirální podobnosti je bod P středem spirální podobnosti zobrazující $ABCD$ na $A'B'C'D'$, což podle věty 3 o konstrukci středu spirální podobnosti znamená, že je-li R průnik přímek AA' a BB', je bod P druhým průsečíkem obou kružnic (různým od R) opsaných trojúhelníkům ABR a $A'B'R$ (obr. 6).

Úloha 3 (26. Italská MO, 2010)

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, ve kterém $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$ a $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$. Dále nechť M značí střed úsečky AB. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DBA|.$$



Obr. 6

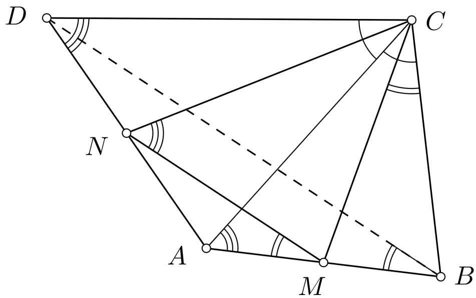
Řešení. Jelikož $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDA|$ a $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle ACD|$, jsou trojúhelníky ABC a DAC podobné, tj. spirálně podobné v $\mathcal{S}$ (viz pozn. 2) se středem C. Ze zachování dělícího poměru ($M = S_{AB}$, $N = S_{DA}$) plyne též $\mathcal{S}(M) = N$, a tedy $\mathcal{S}\colon \overline{BM} \to \overline{AN}$. Užitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) $\mathcal{S}'\colon \overline{BA} \to \overline{MN}$, kde středem této spirální podobnosti $\mathcal{S}'$ je opět bod C. Je tedy $\triangle NMC \sim \triangle ABC$.

Z obr. 7 je patrné

$$|\sphericalangle AMN| + |\sphericalangle NMC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ$$

a také

$$|\sphericalangle BCM| + |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle CMB| = 180^\circ.$$



Obr. 7

Z podobnosti trojúhelníků NMC a ABC plyne $|\sphericalangle NMC| = |\sphericalangle MBC|$, a tudíž z posledních dvou rovností pak obdržíme $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle AMN|$.

Vzhledem k tomu, že úsečka MN je střední příčkou v trojúhelníku ABD, platí

$$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle DBA|,$$

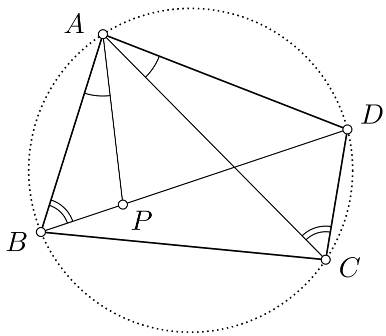
a proto $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle DBA|$, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 4 (Ptolemaiova věta)

Dokažte tvrzení: Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označíme-li délky jeho stran AB, BC, CD, DA po řadě a, b, c, d a délky úhlopříček AC, BD po řadě e, f, pak platí

$$ac + bd = ef.$$

Řešení. Nejprve určíme vhodnou podobnost dvou trojúhelníků. Podle předpokladu je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, tedy body B, C leží na stejném kružnicovém oblouku AD (obr. 8), proto $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. Označme P bod úhlopříčky BD, pro který platí $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BAP|$.



Obr. 8

Z věty uu o podobnosti trojúhelníků tak plyne $\mathcal{S}\colon \triangle ABP \to \triangle ACD$. Využitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) ihned dostáváme také podobnost trojúhelníků ABC a APD, tj. $\mathcal{S}'\colon \triangle ABP \to \triangle ACD$. Z obou výše uvedených podobností pak dostáváme

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CD|}, \quad \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|PD|}{|BC|},$$

tj. $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BP|$, $|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |PD|$.

Sečtením obou posledních rovností získáme po úpravě

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot (|BP| + |PD|) = |AC| \cdot |BD|,$$

což (při zavedeném značení) znamená $ac+bd = ef$. Tím je důkaz ukončen.

Dále čtenářům nabízíme čtyři neřešené úlohy k procvičení uvedené problematiky. Ke každé z nich připojujeme návod k jejich řešení.

Úloha 5

Jsou dány dvě rovnoběžky a bod O, který leží na ose pásu jimi omezeného. Vedeme-li v téže rovině bodem O přímku p různoběžnou s danými rovnoběžkami, protne je postupně v bodech X a Y. Nechť Z je vrchol rovnostranného trojúhelníku XYZ. Otočíme-li přímku p v rotaci se středem O o plný úhel, opíše vrchol Z uvažovaného trojúhelníku jistou množinu bodů. Určete tuto množinu.

[Návod. Pro konkrétní polohu trojúhelníku XYZ lze určit spirální podobnost zobrazující vrcholy X nebo Y na vrchol Z. Pomocí vlastností podobných zobrazení lze určit hledanou množinu bodů.]

Úloha 6 (Simsonova přímka)

Nechť ABC je daný trojúhelník a P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Nechť X, Y, Z jsou paty kolmic z bodu P po řadě na strany AB, BC a AC. Dokažte, že X, Y, Z leží na jedné přímce, tzv. Simsonově přímce.

[Návod. Pro případ, kdy P je identický s jedním z vrcholů trojúhelníku ABC, je vlastnost zřejmá. V opačném případě lze bez újmy na obecnosti uvažovat polohu bodu P na oblouku kružnice opsané trojúhelníku ABC mezi body A a B, na kterém neleží vrchol C. Z vlastností tětivových čtyřúhelníků je možno dokázat podobnost trojúhelníků PAZ a PBY a následně využitím duplicity spirální podobnosti (věta 2) určit zobrazení přímky AB na ZY. Dokažte, že bod X náleží přímce ZY.]

Úloha 7 (USA TST 2000)

Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, bod P je průsečík jeho úhlopříček a E, F jsou po řadě paty kolmic z bodu P na strany AB, CD. Nechť bod K je střed strany BC a L střed AD. Dokažte, že $EF \perp KL$.

[Návod. Jelikož $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jsou trojúhelníky ABP a CDP podobné. Zobrazíme-li bod P v osové souměrnosti s osou CD, pak lze pomocí spirální podobnosti dokázat podobnost trojúhelníků ABP a LKF. Analogicky lze dokázat podobnost trojúhelníků CDP a KLE. Kolmost KL a EF plyne ze shodnosti trojúhelníků LKF a LKE.]

Úloha 8

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C, dále nechť M je střed strany AB a D je takový bod strany BC, že platí

$$|CD| = |CM|.$$

Označme P ($P \neq B$) průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům BCM a BDA. Dokažte, že P leží na ose úhlu ABC.

[NÁVOD. Podle věty 3 existuje „vhodná“ spirální podobnost $\mathcal{S}$. Užitím duplicity (věta 2) pak $\mathcal{S}' : \overline{AM} \to \overline{DC}$. Jelikož body A a C leží na kružnici se středem M, jsou úsečky AM a DC shodné. Na závěr uplatníme vlastnosti výšek trojúhelníku.]

Další poznatky o spirální podobnosti

Závěrem tohoto příspěvku uvádíme pro zájemce další zajímavá tvrzení, která úzce souvisejí s využitím spirální podobnosti při řešení řady dalších planimetrických úloh. Konkrétní příklady aplikací a zadání úloh souvisejících s tématikou je možno nalézt v [2] a [5].

Přímým důsledkem věty 3 je např. následující tvrzení.

Věta 4

Jsou-li v rovině úsečky AB a CD spirálně podobné vzhledem ke středu H a průsečík R přímek AC a BD je různý od bodu H, pak jsou čtyřúhelníky $ABHR$ a $CDHR$ tětivové.

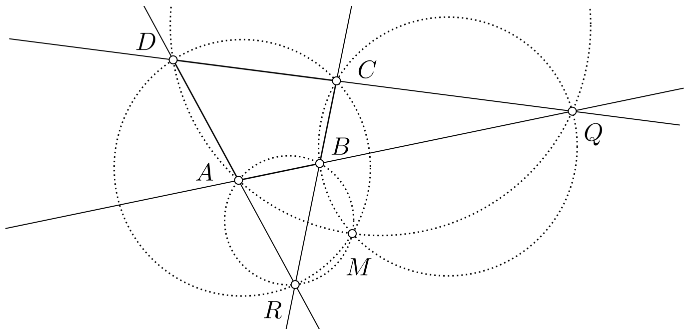
Se spirální podobností je úzce spjat mj. také tzv. *Miquelův bod čtyřúhelníku*[2)], viz následující věta.

Věta 5 (Miquelův bod čtyřúhelníku)

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž platí $AB \cap DC = \{Q\}$, $AD \cap BC = \{R\}$. Kružnice opsané trojúhelníkům AQD, BQC, ARB, DRC se protínají v jediném bodu M, tzv. Miquelově bodu čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 9).

Poznámka 4. Uvažované kružnice ve větě 5 se nazývají *Miquelovy kružnice.*

[2)] Zavedení pojmu lze dohledat např. v [4].



Obr. 9

Vztah Miquelova bodu ke spirální podobnosti prezentuje následující tvrzení.

Věta 6

Nechť M je Miquelův bod čtyřúhelníku $ABCD$. Pak M je střed spirálních podobností zobrazujících $\overline{AB} \to \overline{DC}$, $\overline{AD} \to \overline{BC}$.

Věty 5 a 6 jsou přímými důsledky věty 2 o duplicitě spirální podobnosti a věty 3 o konstrukci středu spirální podobnosti.

Literatura

[1] *Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. New mathematical library, Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[2] *Hrdlička, T.*: Spirální podobnost v planimetrii. Bakalářská práce, PřF UP, Katedra algebry a geometrie, Olomouc, 2018.

[3] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky (10. vydání). Prometheus, Praha, 2008.

[4] *Zhao, Y.*: Cyclic Quadrilaterals – The Big Picture [online]. Winter Camp, c2009 [cit. 2018-10-23]. Dostupné na: `http://yufeizhao.com/olympiad/cyclic_quad.pdf`

[5] *Zhao, Y.*: Three Lemmas in Geometry. [online]. Massachusetts Institute of Technology, Winter Camp, 2010 [cit. 2018-10-23]. Dostupné na: `http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf`