Dvě netradiční užití Hornerova schématu

LUKÁŠ HONZÍK – JAROSLAV HORA

Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň

Hornerovo schéma, nesoucí jméno britského matematika *Williama George Hornera* žijícího na konci 18. a na začátku 19. století, je název algoritmu sloužícího mimo jiné k relativně efektivnímu určování funkčních hodnot polynomů. Ačkoliv se může zdát, že Horner byl tím, kdo tento postup objevil, není tomu tak. Již ve 13. století byla obdobná metoda pro práci s polynomy známá čínským matematikům. Horner ji o 500 let později pouze uvedl do evropské matematiky [1, 2].

Zavedení Hornerova schématu

Před samotným představením Hornerova schématu a jeho aplikace uveďme několik tvrzení, z nichž budeme vycházet. Přitom v dalším textu budeme předpokládat, že se nacházíme v oboru integrity $(T[x], +, \cdot)$, kde $(T, +, \cdot)$ je některé z komutativních číselných těles.

Mějme dva polynomy $f(x) \neq 0$ a $g(x)$, kde $\mathrm{st}[g(x)] \geq 1$, pak je zřejmé, že existují dva polynomy $Q(x)$ a $R(x)$ takové, že platí

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x).$$

Přitom navíc vyžadujeme, aby platilo $R(x) = 0$, anebo $\mathrm{st}[R(x)] < \mathrm{st}[g(x)]$. Oba polynomy $Q(x)$ a $R(x)$ jsou pak určeny jednoznačně.

Pokud by polynom $g(x)$ byl pouze lineární, přesněji normovaný do tvaru $g(x) = x - \alpha$, bude podle předchozího tvrzení platit

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + R(x),$$

kde $R(x) = 0$, anebo $\mathrm{st}[R(x)] = 0$. Z těchto podmínek plyne, že polynom $R(x)$ je pouze konstanta a můžeme provést přeznačení $R(x) = r$.

Po dosazení tedy obdržíme rovnici

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r,$$

ze které již bezprostředně plyne $f(\alpha) = r$. Tím se dostáváme k tzv. větě Bézoutově:

1) Jestliže pro polynom $f(x)$ platí $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$, potom hodnota tohoto polynomu v bodě α je $f(\alpha) = r$.
2) Bod α je nulovým bodem polynomu $f(x)$, právě když polynom $x - \alpha$ dělí polynom $f(x)$.

Je zřejmé, že ověření zmíněné dělitelnosti polynomu $f(x)$ polynomem $g(x) = x - \alpha$, popřípadě určení funkční hodnoty polynomu $f(x)$ v bodě α nemusí být jednoduchou záležitostí. V prvním případě je nutné provést dělení polynomu polynomem, ve druhém dosadit hodnotu α. Celý proces jde ale celkem dobře zjednodušit a zapsat jej právě pomocí Hornerova schématu.

Postačí, když v rovnici

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

položíme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{gathered} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\ = (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \cdot (x - \alpha) = \\ = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (b_1 - \alpha b_2) x^2 + (b_0 - \alpha b_1) x^1 + (r - \alpha b_0). \end{gathered}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin proměnné x dostáváme soustavu rovnic pro neznámé koeficienty polynomu $Q(x)$ a pro neznámou konstantu r, když koeficienty polynomu $f(x)$ považujeme za dané parametry.

$$\begin{aligned} & a_n = b_{n-1} \Rightarrow b_{n-1} = a_n \\ & a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ & a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\ & \ldots \\ & a_2 = b_1 - \alpha b_2 \Rightarrow b_1 = a_2 + \alpha b_2 \\ & a_1 = b_0 - \alpha b_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ & a_0 = r - \alpha b_0 \Rightarrow r = a_0 + \alpha b_0 \end{aligned}$$

Rovnice z pravého sloupce již jen zapišme přehledněji do tabulky, kterou v průběhu algoritmu budeme postupně zaplňovat.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
		αb_{n-1}	αb_{n-2}	$\dots$	αb_2	αb_1	αb_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	r

Do prvního řádku Hornerova schématu zapíšeme všechny koeficienty a_i (včetně těch, které jsou rovny nule) polynomu $f(x)$, do posledního řádku prvního sloupce hodnotu α. Ve druhém sloupci sepíšeme do posledního řádku hodnotu koeficientu a_n, neboť pro ni platí rovnost $a_n = b_{n-1}$. Následuje násobení $\alpha \cdot b_{n-1}$, jehož výsledek je zapsán ve druhém řádku třetího sloupce. Sečtením tohoto součinu s koeficientem a_{n-1} obdržíme koeficient b_{n-2}. Obdobným způsobem postupně vyplníme další sloupce tabulky, čímž obdržíme všechny doposud neznámé koeficienty b_i polynomu $Q(x)$ a hodnotu konstanty r.

Poznamenejme ještě, že hodnotu r můžeme interpretovat podle potřeby dvěma různými způsoby, a to podle Bézoutovy věty, jak nyní ještě jednou zopakujeme.

Pokud vyjde r rovno nule, je to především informace o tom, že bod α je nulovým bodem polynomu $f(x)$. Jinými slovy polynom $f(x)$ je beze zbytku dělitelný lineárním polynomem $x - \alpha$. Naopak je-li $r \neq 0$, nemůže být polynom $f(x)$ dělitelný polynomem $x-\alpha$, a tedy ani bod α nemůže být nulovým bodem $f(x)$. Zároveň s tím je jasné, že ona nenulová hodnota r udává zbytek, který bychom při dělení $f(x) : (x-\alpha)$ dostali. Spolu s touto informací jsme obdrželi také všechny koeficienty (neúplného) podílu $Q(x)$.

Podíváme-li se na věc jiným způsobem, můžeme hodnotu r brát nikoliv jako zbytek po dělení polynomů, nýbrž jako funkční hodnotu polynomu $f(x)$ v bodě $x = \alpha$.

Bez ohledu na to, jakou interpretaci vybereme, popřípadě kterou potřebujeme, jde v obou případech o zjevné zjednodušení výpočtů. Pokud bychom prováděli dělení polynomu polynomem, bylo by zapotřebí postupovat obvyklým způsobem, kdy je vedoucí člen polynomu $f(x)$ dělen vedoucím členem polynomu $x - \alpha$ a následně je zpětným roznásobením dopočítán rozdíl, který je v podstatě zbytkem po tomto částečném dělení. Opakováním těchto kroků až do chvíle, kdy je zbytek po dělení nižšího stupně než polynom $x - \alpha$, bychom se dostali k podílu $Q(x)$ a zbytku po dělení r. V případě určení funkční hodnoty $f(\alpha)$ bychom zase museli počítat mocniny hodnoty α do stupně n, tyto mocniny násobit příslušnými koeficienty a vzniklé součiny nakonec ještě sčítat.

Praktické výpočty

Užití Hornerova schématu pro úplnost ukažme na několika jednoduchých ilustračních příkladech polynomů nad různými číselnými obory.

Příklad 1

Ukažte, že bod $\alpha = -2$ je nulovým bodem polynomu

$$f(x) = 12x^5 + 26x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 4.$$

Řešení. Do prvního řádku Hornerova schématu vypíšeme koeficienty polynomu $f(x)$, do posledního řádku prvního sloupce zapíšeme hodnotu -2 a provedeme popsaný algoritmus.

	12	26	6	5	0	-4
		-24	-4	-4	-2	4
-2	12	2	2	1	-2	**0**

Vzhledem k tomu, že vyšlo $r = 0$, můžeme v souladu s Bézoutovou větou prohlásit, že $\alpha = -2$ je skutečně nulovým bodem zadaného polynomu.

Příklad 2

Určete funkční hodnotu polynomu

$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 6x - 24$$

v bodě $\alpha = -4$.

Řešení. Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu.

	1	0	-4	-3	6	-24
		-4	16	-48	204	-840
-4	1	-4	12	-51	210	$\mathbf{-864}$

Funkční hodnota $f(-4)$ je rovna -864.

Příklad 3

Určete funkční hodnotu polynomu

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + (9+4\mathrm{i})x + (1-8\mathrm{i})$$

v bodě $\alpha = \mathrm{i}$.

Řešení. Tentokrát je Hornerovo schéma výsledkem výpočtů nad tělesem komplexních čísel.

	1	-3	$9+4\mathrm{i}$	$1-8\mathrm{i}$
		i	$-1-3\mathrm{i}$	$-1+8\mathrm{i}$
i	1	$-3+\mathrm{i}$	$8+\mathrm{i}$	**0**

Hledaná funkční hodnota $f(\mathrm{i})$ je rovna 0. Platí tedy, že bod $\alpha = \mathrm{i}$ je nulovým bodem daného polynomu $f(x)$ neboli že $x - \mathrm{i}$ dělí polynom $f(x)$.

Převod čísla z číselné soustavy o základu $z \neq 10$ do desítkové soustavy

Převod čísla z číselné soustavy se základem různým od 10 do desítkové soustavy je jedním z netradičních, ale ve výsledku vcelku logických využití Hornerova schématu.

Na začátku jen připomeňme, že obvykle je převod realizován postupem, který může být žákům a studentům známý z hodin výpočetní techniky či matematiky a vystačí si při něm i bez Hornerova schématu. I přes svou názornost ale může být výpočetně náročný. Stačí si uvědomit, že každé číslo a v dané soustavě o základu z jde zapsat v podobě rozvinutého zápisu

$$a = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0 \cdot z^0,$$

kde mocniny základu z představují jednotlivé řády (tedy v desítkové soustavě bychom mluvili o jednotkách, desítkách, stovkách atd.) a a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_2, a_1 a a_0 jsou číslice čísla a, tj. celá čísla od 0 do $z-1$ včetně. Máme-li tedy zadáno kupříkladu číslo 2 563 v soustavě o základu 8, znamená to, že se jedná o celé číslo.

$$2563_8 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 1024 + 320 + 48 + 3 = 1395.$$

Tento postup však obsahuje, podobně jako určování funkční hodnoty polynomu postupným dosazováním za proměnnou, velké množství zbytečného umocňování.

Při užití Hornerova schématu se této nepříjemnosti dá poměrně elegantně vyhnout. K tomu je zapotřebí uvážit, že zmíněný rozvinutý zápis čísla a není nic jiného, než jistý polynom, kde se na místech koeficientů vyskytují jednotlivé číslice čísla a, zatímco proměnná z je jednoznačně dána základem příslušné číselné soustavy. Jinými slovy, při převodu čísla z nedesítkové číselné soustavy se budeme snažit o zjištění funkční hodnoty polynomu odpovídajícího rozvinutému zápisu čísla a, v němž za proměnnou dosadíme hodnotu základu soustavy z [3].

Užijeme-li tento postup na převod čísla 2563_8, bude Hornerovo schéma vypadat následovně:

	2	5	6	3
		16	168	1392
8	2	21	174	**1395**

Příklad 4

Převeďte číslo 11045 ze soustavy o základu 7 do soustavy desítkové.

Řešení. Do prvního řádku Hornerova schématu zapíšeme jednotlivé číslice daného čísla, do posledního řádku prvního sloupce napíšeme základ $z = 7$ a provedeme známý algoritmus.

	1	1	0	4	5
		7	56	392	2772
7	1	8	56	396	**2777**

Číslo 11045_7 má v desítkové soustavě zápis 2777.

Výpočet derivace polynomu v daném bodě

Oproti předchozímu problému převodu čísla z nedesítkové soustavy do soustavy desítkové je pro určování hodnoty derivace polynomu v bodě α nejprve nutná jistá teoretická příprava. Vyjdeme z nám již dobře známé rovnice $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$. Obě strany této identity derivujme, na levé straně dostaneme derivaci polynomu $f'(x)$, na pravé straně uplatníme pravidlo o derivaci součinu (zároveň mějme na paměti, že r je konstantní funkce, jejíž derivace je rovna nule). Zderivovaná identita bude vypadat takto:

$$f'(x) = Q'(x) \cdot (x - \alpha) + Q(x).$$

Nyní dosadíme-li do rovnice za proměnnou x hodnotu α, bude mít součin $Q'(x) \cdot (x - \alpha)$ hodnotu 0 a můžeme psát $f'(\alpha) = Q(\alpha)$. Ke zjištění hodnoty derivace polynomu $f(x)$ v bodě α tedy stačí určit funkční hodnotu neúplného podílu $Q(x)$ v bodě α. Jinak řečeno, v praktickém užití je nutné aplikovat na zadaný polynom $f(x)$ dvakrát za sebou Hornerovo schéma a hodnota r, která vzejde z jeho druhého použití, je hledanou hodnotou $f'(\alpha)$ [4, 5].

Příklad 5

Určete hodnotu derivace polynomu

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

v bodě $\alpha = 3$.

Řešení. Jak bylo řečeno, pro zjištění hodnoty $f'(3)$ stačí dvakrát po sobě aplikovat na polynom $f(x)$ algoritmus Hornerova schématu. Zmíněné dvojí aplikování Hornerova schématu můžeme bez problému zapsat do jedné tabulky.

	1	-5	3	1
		3	-6	-9
3	1	-2	-3	$\mathbf{-8}$
		3	3	
3	1	1	**0**	

Pro lepší orientaci v tabulce upřesněme, že ve třetím řádku jsme při první aplikaci obdrželi koeficienty polynomu

$$Q(x) = x^2 - 2x - 3,$$

na který jsme uplatnili druhou aplikaci. Výsledek, který nás zajímá, se však nachází na poslední pozici v posledním řádku, a sice $f'(3) = 0$.

Na závěr proveďme ještě ověření právě zjištěného výsledku tradičním způsobem, tedy určením derivace podle známých pravidel pro derivování polynomů a následným dosazením.

Derivace polynomu $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ je $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ a v bodě $\alpha = 3$ má hodnotu $f'(3) = 27 - 30 + 3 = 0$.

L i t e r a t u r a

[1] *O'Connor, J. J., Robertson, E. F.*: Horner Biography. MacTutor History of Mathematics archive [online]. University of St Andrews, St. Andrews, 2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Horner.html

[2] *Wikipedie*: Otevřená encyklopedie: William George Horner [online]. c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Horner

[3] *Hanák, D.*: Hornerovo schéma. Itnetwork.cz: Ajťácká sociální síť a materiálová základna pro C#, Java, PHP, HTML, CSS, JavaScript a další [online]. Praha, c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: https://www.itnetwork.cz/algoritmy/matematicke/algoritmus-matematicke-hornerovo-schema

[4] Horner's Method. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. Alexander Bogomolny, c1996–2017 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/HornerMethod.shtml#

[5] Horner's Rule for a Polynomial and Its Derivative. Computational Physics with C++ [online]. University of Utah, Salt Lake City, Utah, 2003, 2007-08-17 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www.physics.utah.edu/~detar/lessons/c++/array/node4.html

Procházky (nejen) po krychli

VLASTA MORAVCOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – KAREL PAZOUREK

MFF UK, Praha – MFF UK, Praha – Gymnázium, Třeboň

Prostorová představivost je důležitou součástí matematického vzdělávání na základních a středních školách. To dokládá i *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, kde dovednost orientovat se v prostoru patří k očekávaným výstupům vzdělávání v matematice již na prvním stupni [1, s. 32] a řešení úloh na prostorovou představivost se předpokládá i na druhém stupni základní školy. Ani střední školy nezapomínají na rozvíjení této dovednosti, například *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* uvádí, že vzdělávání v matematice vede žáka k rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti [2, s. 22].