

Mezipředmětové vztahy v matematice

DANA VOJTOVIČOVÁ

Gymnázium, Olomouc-Hejčín

Cílem tohoto příspěvku je poukázat na možnosti využití konkrétních výsledků projektu *Matematická gramotnost na střední škole* v podobě pracovních listů, které autorka za tímto účelem vytvořila.

Hlavními tématy pracovních listů jsou oblasti kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost a finanční gramotnost, zároveň však svým zaměřením na reálný život a konkrétní situace daleko přesahují do ostatních předmětů a tím pomáhají učitelům implementovat mezipředmětové vztahy do hodin matematiky, což je jedna z oblastí, na niž se v současné době klade velký důraz. Pracovní listy se liší úrovní náročnosti a čtenář je může využívat v běžné výuce matematiky na různých typech středních škol, viz odkaz v závěru článku.

Matematická gramotnost je definována jako *schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana* [2]. Hlavní snahou bylo tedy propojit matematiku s běžným životem, najít příklady, které aplikují matematiku na reálné situace a skutečná data a využít mezipředmětové vztahy. Při tvorbě některých úloh autorka vycházela z dostupných zdrojů, jakými jsou např. [1, 4], [3, s. 84].

Chceme-li ve výuce matematiky rozvíjet matematickou gramotnost, nestačí pouze použít vhodné příklady a materiály. Je nutné také přemýšlet nad metodami, které se pro tento účel nejlépe hodí. Máme-li přimět žáky přemýšlet, samostatně pracovat a hledat nejjednodušší řešení, není frontální výuka příliš vhodná. Musíme také dát žákům čas potřebný k přemýšlení a klást návodné otázky, pokud žák neví, jak dál. Asi nejobtížnější je pro učitele zůstat v pozadí a nepodlehnout nutkání prozradit žákům řešení, pokud jsou schopni úlohu vyřešit sami. V tomto případě je důležité pracovat také s chybou žáka, uvést jeho chyby na pravou míru a využít je v procesu učení v jeho prospěch. Oblast metod výuky k matematické gramotnosti však již výrazně překračuje rozsah tohoto článku.

Jak se v praxi potvrdilo, při využití zmíněných materiálů je vhodné použít následující strukturu vyučovací hodiny:

1. Žáci nejdříve pracují samostatně na úloze zadané v pracovním listu.
2. Jakmile mají zpracovanou určitou část, pracují ve dvojicích a diskutují svá řešení. Rozhodnou, zda a která řešení jsou správná, přitom se učí vysvětlit, zdůvodnit a obhájit svůj postup.
3. Svá řešení následně prezentují před třídou.
4. Na závěr učitel spolu s žáky zhodnotí práci, případně opraví nebo vysvětlí nejasnosti. Ne vždy je však nutné vše zvládnout v jedné vyučovací hodině. Mnohdy je lepší nechat problém „uležet“ a vrátit se k němu v dalších hodinách.

V některých pracovních listech je na závěr uveden Projekt, viz např. *Absolutní a relativní změna – Změny klimatu*, který může být součástí vyučovací hodiny, ale může být také zadán jako samostatná nebo skupinová práce doma, případně v rámci školního výletu nebo projektového dne (podle charakteru úlohy).

Jako ukázkou možného konkrétního využití nyní uvádíme jeden pracovní list s názvem

Absolutní a relativní změna – Změny klimatu.

Pracovní list z tohoto odkazu je uveden na stránkách 32 a 33.

Komentář k pracovnímu listu Absolutní a relativní změna – Změny klimatu

Cílem hodiny bylo vybrat z textu slovní úlohy požadované informace, zopakovat práci s procenty a statistickými daty, uvědomit si rozdíly mezi absolutní a relativní změnou, naučit se zpracovat výsledky ve formě tabulek a diagramů a vyvodit z nich závěry.

Podmínky a příprava

Předem si musíme nachystat pracovní listy, v učebně s projektorem je možné promítnout postupně části pracovního listu na plátno a nemusí se pak tisknout. Všechny údaje ale musí být dobře vidět. Je dobré si připravit učebnice s tématem Statistika (modus, medián). V učebně s počítači lze využít internet, žáci mohou také využívat tablet nebo chytrý telefon,

Absolutní a relativní změna

Změny klimatu

Na hvězdárně v pražském Klementinu byla zahájena pravidelná meteorologická měření už v roce 1752.

Podle těchto záznamů můžeme pro každý měsíc určit počty tropických dnů, kdy je teplota vyšší nebo rovna $30\text{ }^{\circ}\text{C}$, a počty ledových dnů, kdy teplota nevystoupí nad $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.



V letech 2008 až 2017 vzrostl průměrný počet tropických dnů na 20,5 dne za rok, což bylo o 15,5 dnů za rok více než ve srovnání s obdobím mezi lety 1775 až 1784. Ledových dnů naopak v desetiletí 2008 až 2017 ubylo, a to o 48 % ve srovnání s desetiletím 1775 až 1784, kdy bylo průměrně 34,9 ledových dnů za rok.

Úloha 1: Z výše uvedených údajů zjistěte:

- Která ze změn je větší, jestliže ji vyjádříme počtem dnů?
- Která ze změn je větší, jestliže ji vyjádříme v %?
- Jaká znaménka můžeme změnám přiřadit?
- Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů v období let 1775 až 1784?
- Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů v letech 2008 až 2017?

Úloha 2: V následující tabulce jsou údaje o počtu tropických, ledových a arktických dní v období let 1892 až 1901. Arktický den je takový den, kdy maximální teplota nevystoupí nad $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Zjistěte:

- průměrné počty tropických, ledových a arktických dní v tomto období
- modus a medián pro tropické, ledové i arktické dny
- absolutní změny (počty dnů) vzhledem k období 1775 až 1784
- relativní změny (%) vzhledem k období 1775 až 1784
- absolutní změny v období 2008 až 2017 vzhledem k období 1892 až 1901 (tabulka)
- relativní změny v období 2008 až 2017 vzhledem k období 1892 až 1901 (tabulka)

Tabulka:

Rok	Počet tropických dní	Počet ledových dní	Počet arktických dní
1892	18	49	0
1893	3	42	4
1894	4	29	1
1895	8	63	3
1896	2	34	0
1897	2	29	0
1898	6	14	0
1899	4	30	3
1900	9	16	2
1901	4	48	3

Zdroj dat: www.in-pocasi.cz/archiv

Výsledky zpracujte do přehledné tabulky. Sestrojte vhodný diagram pro průměrné počty tropických a ledových dní v daných obdobích.

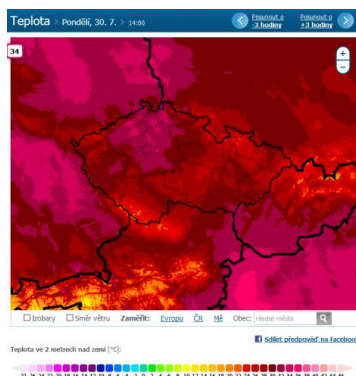
Projekt:

Najděte na internetu (www.in-pocasi.cz/archiv) údaje o průměrných počtech tropických a ledových dnů za rok v Česku v jiném desetiletém období v 18., 19., 20. nebo 21. století.

Zjištěné údaje zpracujte do tabulky a diagramu v Excelu a zjistěte:

- Absolutní změny
- Relativní změny
- Jaká znaménka můžeme změnám přiřadit?
- Kolik bylo průměrně za rok tropických dnů?
- Kolik bylo průměrně za rok ledových dnů?
- Jaký byl v těchto letech počet arktických dní?

Srovnejte tato období. Můžete z toho vyvodit nějaký závěr?



Obr.: Zdroj: www.in-pocasi.cz/mode1

aby mohli samostatně vyhledat informace, které potřebují k práci. V učebně s počítači žáci mohou pracovat v Excelu, jinak lze tabulky a grafy kreslit do sešitu. Pro slabší žáky tabulky připravíme předem.

Průběh vyučovací hodiny (45 min)

Po krátkém uvedení do problematiky a motivačním rozhovoru o klimatických změnách byli žáci seznámeni s cílem a organizací vyučovací hodiny a dále již pracovali samostatně a posléze ve dvojicích podle schématu uvedeného výše. Po dokončení každé úlohy žáci prezentovali své výsledky, zapsali je na tabuli a zkontrolovali své diagramy. Následovalo hodnocení kvality práce žáků učitelem a hodnocení žáků. Na závěr proběhla diskuse na téma Vývoj klimatu v ČR, kdy se žáci pokusili interpretovat své výsledky z hlediska teplotního vývoje v ČR a diskuse, zda mají jejich výsledky nějakou výpovědní hodnotu.

Osobní zkušenosti

Téma *Absolutní a relativní změna – Změny klimatu* bylo zařazeno do běžné výuky matematiky na gymnáziu v půlených hodinách, aby byl dostatečný prostor pro diskusi a klid na individuální práci. Menší počet žáků ve třídě je nutností, pokud navíc chceme poskytnout žákům individuální podporu. Toto téma je možné zařadit do výuky v podstatě kdykoli, neboť učivo vychází ze znalostí získaných na základní škole.

Nejvýhodnější metodou se jeví kombinace individuální práce a práce ve dvojicích. Příliš se neosvědčila práce ve skupině, a to ze dvou důvodů: žáci vzájemně nevidí dobře na své zápisy a práci často zastane jeden žák a ostatní se „vezou“.

Překvapením bylo, že starší žáci měli větší problémy s počítáním procent než mladší, většinou si neporadili s výpočtem relativní změny v počtu tropických dnů v úloze 1. Největším problémem bylo správně určit základ. Je vhodné do běžných hodin matematiky na střední škole čas od času výpočet procent zařadit (a to zvláště složitějších příkladů), protože se sice počítá s tím, že žáci toto učivo zvládli na základní škole, ale praxe potvrdila, že tomu tak není a že to spíše zapomněli.

S problémem procent v úloze 1 bylo potřeba žákům vhodnými otázkami pomoci. Za základ zde totiž vzali hodnotu 20,5 dní (průměrný počet tropických dní – TD v posledním desetiletí) místo 5 dní (průměrný počet TD v prvním desetiletí) a změna v procentech jim vyšla 75,6 %. Bylo třeba jim zdůraznit, že chceme zjistit, jak moc počet TD vzrostl oproti prvnímu desetiletí. Některým žákům pomohla otázka: „Jakou hodnotu bys dostal, kdyby se počet TD zvedl dokonce o 100 %?“ Ukázalo se, že by dostali

hodnotu 10, což ani zdaleka není 20,5. S touto nápovědou už byli většinou schopni správnou hodnotu vypočítat. Je dobré s tímto problémem pomáhat žákům individuálně, aby měli větší šanci na to přijít sami.

Naopak se sestavením sloupcového diagramu ani se statistickými pojmy nebyly žádné větší problémy. Pojmy jako modus a medián znali a stačilo jim jen osvěžit své znalosti pomocí učebnice nebo internetu. Při tvorbě diagramu bylo třeba některým žákům připomenout, aby se zamysleli nad tím, co chceme v grafu všechno vidět.

První dvě úlohy se dají v jedné vyučovací hodině pohodlně zvládnout i s hodnocením a diskusí. Závěrečná diskuse byla právě tím, co v žácích zanechalo pocit „zajímavé“ hodiny.

Doporučení

Pro slabší žáky je nutné připravit dopředu tabulky, do kterých jen doplní výsledky (viz níže). Pokročilejší žáci jsou většinou schopni vytvořit je samostatně, ale slabší s tím ztratí příliš mnoho času. Na druhou stranu, máme-li možnost hodinu rozdělit na dvě a počítáme-li například i s tím, že žáci budou pracovat na počítači, je lepší, když i slabší žáci zkusí strukturu tabulky vymyslet a nakreslit sami. Pokud máme více času, můžeme do srovnání zařadit i arktické dny (AD), přičemž chybějící údaje pro první a poslední desetiletí mohou žáci vyhledat sami na internetu na adrese: www.in-pocasi.cz/archiv

Průměrný počet AD	
1775–1784	2,5
1892–1901	1,6
2008–2017	0

Tabulky pro žáky

Úloha 1

Rok	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna
1775-1784						
2008-2017						

Úloha 2

Období	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna	počet AD	abs. změna	rel. změna
1775-1784									
1892-1901									
1892-1901									
2008-2017									

Řešení

Úloha 1

Rok	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna
1775-1784	5	+15,5	+310 %	34,9	-16,8	-48 %
2008-2017	20,5			18,1		

- a) V počtech dnů je větší pokles ledových dní – LD (16,8)
 b) V procentech je větší nárůst tropických dní – TD (310 %)
 c) nárůst +, pokles –
 d) $20,5 - 15,5 = 5$
 e) $48 \% \text{ z } 34,9 \text{ je } 16,8; 34,9 - 16,8 = 18,1$

Úloha 2

a)–b)

Období 1892-1901	Průměrná hodnota	Modus	Medián
TD	6	4	4
LD	35,4	29	32
AD	1,6	0	1,5

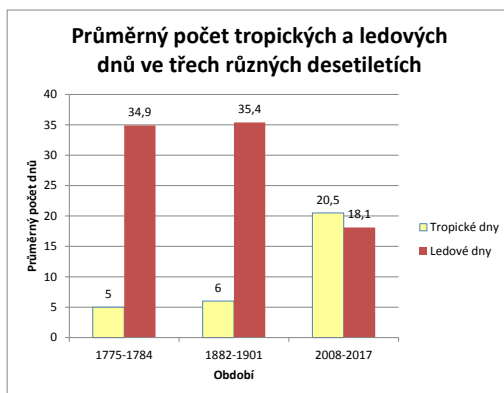
Výhodou mediánu je fakt, že není ovlivněn extrémními hodnotami. Například u počtu tropických dní v období 1892-1901 máme jednu extrémní

hodnotu (18), ostatní hodnoty jsou menší než 10. Aritmetický průměr (6) zde tedy není příliš vhodnou mírou polohy. Medián a modus nabývají hodnoty 4, což lépe vystihuje toto období. Žáci si mohou průměrné hodnoty, modus i medián zkusit zjistit pomocí Excelu.

c)–f)

Období	počet TD	abs. změna	rel. změna	počet LD	abs. změna	rel. změna	počet AD	abs. změna	rel. změna
1775-1784	5	+1	20 %	34,9	+0,5	+1,4 %	2,5	-0,9	-36 %
1892-1901	6			35,4			1,6		
1892-1901	6	+14,5	241,7 %	35,4	-17,3	-48,9 %	1,6	-1,6	-100 %
2008-2017	20,5			18,1			0		

Sloupcový diagram



Zpětná vazba

Z dotazníkového šetření vyplynulo, že žáci hodnotili hodinu jako zajímavou, ocenili, že si zopakovali procenta a projevíli zájem o další podobný způsob výuky, jejich vlastními slovy řečeno: „takovou hodinu bychom chtěli častěji“. Negativní reakce nebyla zaznamenána. Žáci byli hodně překvapeni, že data poskytnutá v úlohách jsou skutečná, že je autorka sama

vybrala ze záznamů archívu meteorologické stanice v pražském Klementinu a že si je mohou najít a zpracovat sami. K tomu je určen navazující projekt, který je nepovinný.

Poznámka

Sledovaná desetiletá období byla zvolena záměrně po zhruba stejné době 117, resp. 116 letech, aby vývoj v počtech tropických a ledových dní bylo možno lépe srovnávat. Zde se ukázalo, že po prvních zhruba 100 letech jsou změny malé, v dalším období je změna výrazná. Je třeba žákům vysvětlit, že více by nám o vývoji teplot na českém území řekly průměrné denní teploty, ne jen počty tropických a ledových dní, a to za celé období, ne jen za tato vybraná desetiletí. Je třeba také zdůraznit, že se jedná o data sbíraná sice po dlouhou dobu, ale pouze na jednom místě (lokálně). Během diskuse žáci mohou sami tyto skutečnosti odhalit, což rozvíjí tzv. kritické myšlení.

Hodnocení

Přestože se ve zkušebních hodinách vždy jednalo o odpolední vyučování, tyto hodiny byly živé a žáci pracovali velmi aktivně. Velice pomohla úvodní motivace, kdy si žáci uvědomili, že budou pracovat se skutečnými daty a zkoumat problém, který se jich osobně dotýká.

Na závěr uvádíme ještě jeden pracovní list s názvem *Kontokorent nebo kreditka*, tentokrát již bez rozboru a komentáře.

Kontokorent nebo kreditka

Zařazení úloh z matematické gramotnosti do běžných hodin matematiky je na jedné straně pro učitele velice náročné na přípravu a pak také každá taková hodina ukrojí z toho mála času, které na probrání povinných témat máme. Na druhou stranu se nám ale tato námaha bohatě vyplatí. Nejen že si žáci zopakují spoustu užitečných dovedností, ale hlavně se na matematiku začnou dívat trochu jinak a aplikováním matematiky na konkrétní situace ze života uvidí lépe její smysl. A třeba je pak matematika začne víc bavit.

Další pracovní listy lze najít na adrese:

<https://www.gytool.cz/predmetove-komise/mat/?s=aktivita>

Literatura

- [1] *Hejný, M. et al.*: Creative Teaching in Mathematics, vyd. UK Praha, 2006.
- [2] <https://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/12561/VYMEZENI-POJMU-MATEMATICKA-GRAMOTNOST.html/>
- [3] <http://www.csicr.cz/cz/DOKUMENTY/Publikace/Ulohy-pro-rozvoj-matematicke-gramotnosti>
- [4] <https://www.mathsisfun.com/>

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 251 a 252 můžete zaslat nejpozději do 20. 5. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 251

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme P, Q po řadě paty výšek z vrcholů C, D na stranu AB . Předpokládejme, že body P, Q leží na úsečce AB a platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokažte, že $|DA| + |AB| + |BC| > |AC| + |BD|$.

Josef Tkadlec

Úloha 252

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$

$$x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

právě jeden společný kořen.

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 247 a 248, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (27.) ročníku našeho časopisu.