Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou?

JIŘÍ BLAŽEK – PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Žáci mohou poznat elipsu nejprve názorně, jako řez kuželové plochy rovinou určitého sklonu. Tato představa o křivce mnoho nevypovídá, tak je vhodnější definovat ji jako množinu bodů daných vlastností. Většinou se můžeme setkat s některou ze tří níže uvedených definic[1]. Ekvivalence prvních dvou se názorně dokazuje užitím stereometrie, vlastnost z třetí definice lze odvodit například metodou souřadnic.

Stereometrické úvahy vyžadují prostorovou představivost. Nedala by se ekvivalence všech tří definic dokázat jen pomocí planimetrie? Odpověď na otázku je kladná a její hledání vede k zajímavým poznatkům.

Definice 1 (*Apollonius z Pergy, Kuželosečky, III.52*)
Elipsa je množina $\mathcal{A}$ všech bodů P v rovině, které mají součet vzdáleností od daných dvou bodů F_1 a F_2 roven číslu $2a > |F_1F_2| = 2e$. Body F_1 a F_2 se nazývají *ohniska elipsy*, střed S úsečky F_1F_2 je *středem elipsy*.

Body P takto definované elipsy lze snadno sestrojovat pomocí *řídicí kružnice* $k(F_2; 2a)$. Ke zvolenému bodu N na kružnici je P průsečíkem osy o úsečky F_1N s úsečkou F_2N (obr. 1).

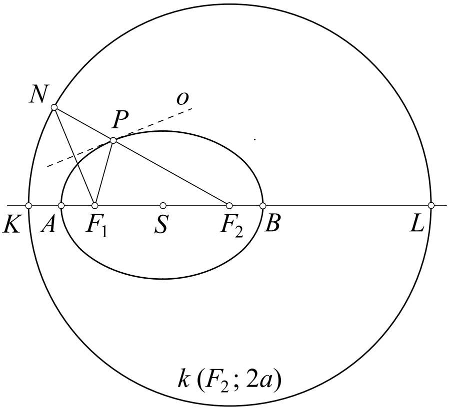
Definice 2 (*Pappos z Alexandrie, Sbírka, Kniha VII*)
Elipsa je množina $\mathcal{B}$ všech bodů P v rovině, které mají od daného bodu

[1] V závorce za názvem definice je vždy odkaz na první známé dílo, v němž je daná vlastnost uvedena.

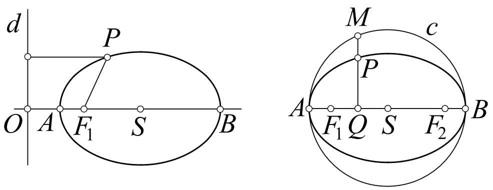
F_1 a dané přímky d, jež neobsahuje bod F_1, konstantní poměr vzdáleností

$$\varepsilon = \frac{|PF_1|}{|Pd|} < 1. \tag{1}$$

Přímka d se nazývá *řídicí přímka elipsy*, bod F_1 je její ohnisko.



Obr. 1 Elipsa a její řídicí kružnice



Obr. 2 K definicím 2 a 3

Definice 3 (*Archimédes, O konoidech a sféroidech*)

Nechť je dána kružnice $c(S; a)$ s průměrem AB. K bodu $M \in c - \{A, B\}$ sestrojme jeho kolmý průmět Q na úsečku AB a na polopřímce QM bod P tak, aby platilo

$$\frac{|PQ|}{|MQ|} = \frac{b}{a} = \nu, \tag{2}$$

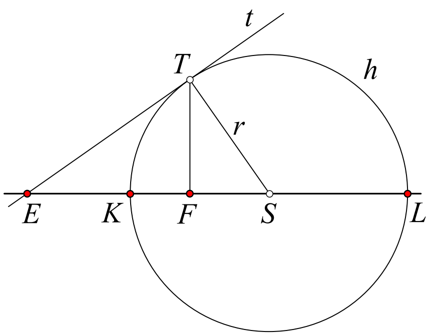
kde b je dané kladné číslo, menší než a. Množina $\mathcal{C}$ všech takových bodů P doplněná o body A a B se nazývá *elipsa*. Čísla a a b nazýváme (v daném pořadí) *hlavní a vedlejší poloosa elipsy* a c je *vrcholová kružnice elipsy*.

Harmonická čtveřice bodů a Apolloniova kružnice

Čtveřice (F, E, K, L) kolineárních bodů se nazývá *harmonická čtveřice bodů*, právě když platí

$$\frac{|FK|}{|EK|} = \frac{|FL|}{|EL|} = \lambda \neq 1. \tag{3}$$

Trojici (E, K, L) (resp. (F, K, L)) snadno doplníme na harmonickou čtveřici (F, E, K, L) konstrukcí znázorněnou na obr. 3, kde $FT \perp KL$ a T je bod dotyku tečny t z bodu E ke kružnici h s průměrem KL. (Důkaz konstrukce, stejně jako důkaz následujícího tvrzení, neuvádíme. Je dostupný v článku [1].)



Obr. 3 Harmonická čtveřice bodů a Apolloniova kružnice

Harmonická čtveřice (F, E, K, L) jednoznačně určuje poměr λ daný vztahem (3) a tzv. *Apolloniovu kružnici* h s průměrem KL, jež je množinou všech bodů X dané roviny s vlastností

$$\frac{|FX|}{|EX|} = \lambda. \tag{4}$$

Apolloniovu kružnici h určenou čtveřicí (F, E, K, L), resp. dvojicí (F, E) a poměrem λ, budeme značit h_{FEKL}, resp. $h_{FE,\lambda}$.

Eukleidovu větu o odvěsně lze pro trojúhelník EST zapsat ve tvaru

$$r^2 = |FS| \cdot |ES|, \tag{5}$$

který upozorňuje na souvislost s kruhovou inverzí.

Základní objekty a vztahy společné množinám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

Zavedením vztahu

$$a^2 = b^2 + e^2 \tag{6}$$

ozřejmíme souvislost definic 1 a 3 (obr. 4). U množiny $\mathcal{C}$ nám tento vztah umožňuje dodefinovat *excentricitu* e a ohniska F_1, F_2 jako body úsečky AB vzdálené od jejího středu S o délku e. U množiny $\mathcal{A}$ pomůže analogicky zavést vedlejší poloosu b a *vedlejší vrcholy* C, D elipsy. Není těžké pomocí definice 1 ověřit, že i pro množinu $\mathcal{A}$ platí $|AS| = |BS| = a$. Body A, B nazýváme *hlavní vrcholy* elipsy.

Doplňme dále trojici bodů (F_1, K, L), kde K a L jsou průsečíky kružnice $k(F_2; 2a)$ s přímkou AB, na harmonickou čtveřici (F_1, E, K, L). Střed úsečky EF_1 označme O a její osu d. Ukážeme, že d je řídicí přímka z definice 2.

Vztah (5) lze pro naši situaci zapsat ve tvaru

$$(2a)^2 = |F_1F_2| \cdot |EF_2|, \tag{7}$$

z nějž pomocí obr. 4 určíme

$$|EF_2| = \frac{2a^2}{e}, \quad |OS| = \frac{|EF_2|}{2} = \frac{a^2}{e}$$

a

$$|OE| = |OF_1| = |OS| - e = \frac{b^2}{e}.$$

Dále zjistíme, že

$$\frac{|AF_1|}{|Ad|} = \frac{|AF_1|}{|AO|} = \frac{a-e}{|OF_1| - (a-e)} = \frac{e}{a},$$

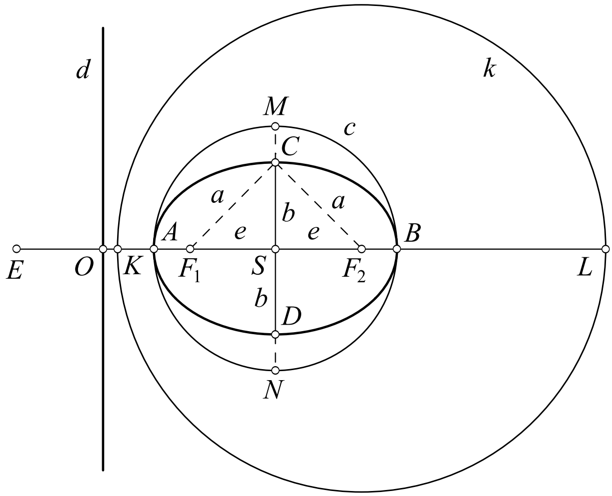
$$\frac{|BF_1|}{|Bd|} = \frac{|BF_1|}{|BO|} = \frac{e+a}{a+|OS|} = \frac{e}{a}$$

a

$$\frac{|DF_1|}{|Dd|} = \frac{|CF_1|}{|Cd|} = \frac{|CF_1|}{|OS|} = a \cdot \frac{e}{a^2} = \frac{e}{a}.$$

Analogicky lze ověřit, že též

$$\frac{|KF_1|}{|KE|} = \frac{|LF_1|}{|LE|} = \frac{e}{a}.$$



Obr. 4 Prvky společné množinám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

Uvedené výsledky vedou k předpokladu, že v konfiguraci na obr. 4 je množina $\mathcal{B}$ dána ohniskem F_1, řídicí přímkou d a konstantou

$$\varepsilon = \frac{e}{a}, \tag{8}$$

jež se nazývá *relativní excentricita.*

Vidíme, že množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ mají na obr. 4 společné body A, B, C a D, stejně tak i veličiny a, b, e a ε. Všem třem množinám jsou přiřazeny tatáž ohniska F_1 a F_2, bod S i kružnice k a c, rovněž tak i body E, O a přímka d. Čtenář se jistě snadno přesvědčí, že kterákoliv z trojic (F_1, F_2, a), (F_1, d, ε), (A, B, ν) jednoznačně určuje všechny vyjmenované prvky.

Navíc platí následující tvrzení.

Věta 1

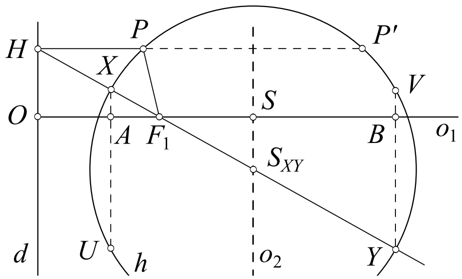
Vrcholová kružnice elipsy je Apolloniovou kružnicí $c = c_{F_1O,\varepsilon} = c_{F_1OAB}$.

Řídicí kružnice elipsy je Apolloniovou kružnicí $k = k_{F_1E,\varepsilon} = k_{F_1EKL}$.

Věta 2

Množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou souměrné podle přímek AB a CD, které v daném pořadí nazýváme *hlavní a vedlejší osa elipsy* a značíme o_1 a o_2. Jsou tedy souměrné i podle jejich průsečíku S, tzv. *středu elipsy.*

Důkaz. Souměrnost množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$ podle obou os je zřejmá z jejich definic. Zřejmá je i souměrnost množiny $\mathcal{B}$ podle osy o_1. Dokážeme její souměrnost podle osy o_2.



Obr. 5 K důkazu symetrie množiny $\mathcal{B}$

Označme P libovolný bod množiny $\mathcal{B}$ různý od bodů A a B. Bod H je pata jeho kolmice na řídicí přímku d (obr. 5). Apolloniova kružnice $h = h_{F_1H,\varepsilon}$ prochází bodem P a protíná polopřímku HF_1 v bodech X a Y. Z rovností

$$\varepsilon = \frac{|F_1X|}{|HX|} = \frac{|F_1A|}{|OA|} = \frac{|F_1Y|}{|HY|} = \frac{|F_1B|}{|OB|}$$

a vlastností rovnoběžného promítání plyne $AX \parallel OH \parallel BY$ a odtud kolmost úseček AX a BY na přímku AB.

Osa pásu ohraničeného rovnoběžkami AX a BY je kolmá na AB a prochází středem každé jeho příčky. Prochází tedy středem S_{XY} průměru XY kružnice h i středem S úsečky AB. Je to přímka o_2, vedlejší osa elipsy.

Pokud je přímka HP sečnou kružnice h, pak její průsečík $P' \neq P$ s kružnicí patří také do množiny $\mathcal{B}$ a je souměrný s bodem P podle osy o_2, protože tětiva PP' je kolmá na osu o_2 kružnice h. Je-li HP tečnou kružnice h, pak je bod P v souměrnosti podle o_2 samodružný.

Složením symetrií s osami o_1 a o_2 vzniká souměrnost podle středu S.

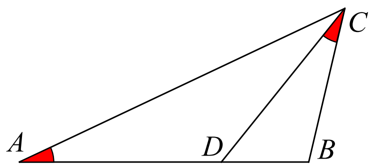
Důkaz ekvivalence definic 1, 2 a 3

Nejprve uvedeme pomocnou větu, která má širší využití.

Věta 3

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřním bodem D strany AB platí

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|, \quad \text{právě když} \quad |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|.$$



Obr. 6 Ilustrace k větě 3

Důkaz. Z přepisu vztahu $|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|$ na tvar

$$\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

plyne, že trojúhelníky ABC a CBD jsou podobné podle věty *sus*. Shodují se totiž v poměru stran přilehlých společnému úhlu při vrcholu B. Z podobnosti plyne $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|$.

Obráceně, platí-li $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|$, pak jsou trojúhelníky ABC a CBD podobné podle věty *uu*. Z podobnosti plyne $|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|$.

Poznámka 1

Čtenář si patrně uvědomil souvislost věty 3 s Eukleidovou větou o odvěsně. Snadno lze též nahlédnout, že je přímka BC tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ADC a body A, D jsou vzor a obraz v kruhové inverzi se základní kružnicí $z(B; |BC|)$.

Věta 4

Definice 1 a 2 jsou ekvivalentní.

Důkaz. Máme dokázat $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Víme již, že

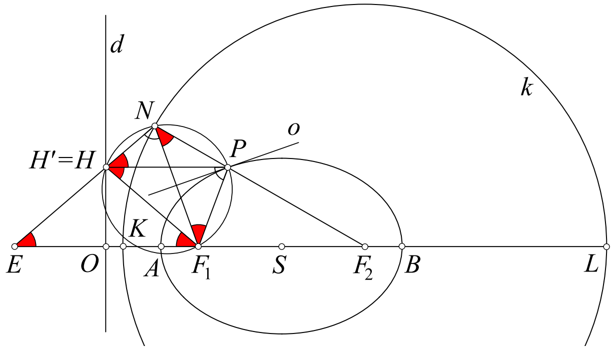
$$o_1 \cap \mathcal{A} = \{A, B\} = o_1 \cap \mathcal{B}.$$

Nechť $P \notin o_1$ je libovolný bod množiny $\mathcal{A}$. Označme N jeho určující bod na řídicí kružnici k a H' průsečík úsečky EN s přímkou d (obr. 7).

Uplatněním vztahu (5) a věty 3 na trojúhelník EF_2N s bodem F_1 uvnitř jeho strany EF_2 zjistíme, že $|\sphericalangle F_1NF_2| = |\sphericalangle F_2EN|$. Rovnoramenné trojúhelníky EF_1H' a NF_1P tedy mají při svých základnách shodné úhly, jejichž velikost označíme φ.

Čtyřúhelník $H'F_1PN$ je vepsán do kružnice, neboť $|\sphericalangle F_1H'N| = 2\varphi$ (vnější úhel trojúhelníku EF_1H') a $|\sphericalangle NPF_1| = 180^\circ - 2\varphi$ (viz trojúhelník NF_1P). Z vlastností obvodových úhlů nahlédneme, že

$$|\sphericalangle F_1H'P| = \varphi = |\sphericalangle PH'N|.$$



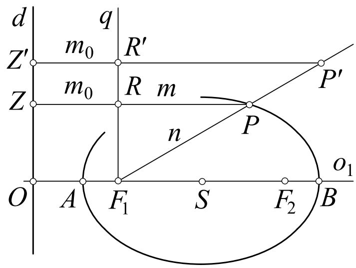
Obr. 7 K první části důkazu věty 4

Přímky PH' a d jsou osy úhlů různoběžek EN a F_1H'. Jsou tedy na sebe kolmé a pata H kolmice z bodu P elipsy na přímku d je totožná s bodem H'. (Kdyby tomu tak nebylo, dojdeme ke sporu se součtem úhlů v trojúhelníku $HH'P$.)

Z rovností $|\sphericalangle NEF_1| = |\sphericalangle PHF_1|$ a $|\sphericalangle ENF_1| = |\sphericalangle HPF_1|$ (obvodové úhly) plyne podobnost trojúhelníků NEF_1 a PHF_1 (obr. 7). Z ní a z Apolloniovy kružnice k obdržíme vztah (1):

$$\frac{|PF_1|}{|Pd|} = \frac{|F_1P|}{|HP|} = \frac{|F_1N|}{|EN|} = \frac{|F_1K|}{|EK|} = \varepsilon.$$

Dokázali jsme, že každý bod množiny $\mathcal{A}$ patří do množiny $\mathcal{B}$. Ukážeme ještě, že žádné další body množina $\mathcal{B}$ neobsahuje.



Obr. 8 K druhé části důkazu věty 4

Body přímky o_1 již nemusíme uvažovat. Zvolme tedy bod $P' \notin o_1$ a označme P průsečík množiny $\mathcal{A}$ s polopřímkou F_1P' (obr. 8, existenci průsečíku zaručuje poloha bodu F_1). Užitím označení z obr. 8, kde $q \perp o_1$, a stejnolehlosti trojúhelníků F_1PR a $F_1P'R'$ dostáváme

$$\varepsilon = \frac{|F_1P|}{|PZ|} = \frac{n}{|m + m_0|} \tag{9}$$

a

$$\varepsilon' = \frac{|F_1P'|}{|P'Z'|} = \frac{kn}{|km + m_0|} = \frac{n}{|m + \frac{m_0}{k}|}, \tag{10}$$

kde $k \in (0, \infty)$, pokud ovšem přijmeme dohodu, že délce m přiřadíme záporné znaménko, právě když body P a P' leží uvnitř poloroviny qO.

Ze vztahů (9) a (10) plyne, že $\varepsilon' = \varepsilon$, právě když $k = 1$ (tzn. $P' = P$).

Poznámka 2

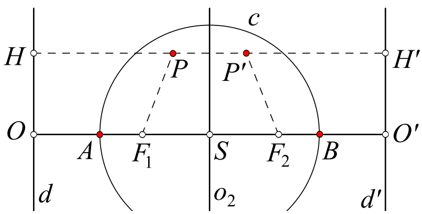
Tvrzení $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ plyne také ze symetrie množiny $\mathcal{B}$ podle osy o_2:

Jsou-li O', F_2 a d' obrazy bodů O, F_1 a řídicí přímky d v souměrnosti podle osy o_2 (obr. 9), pak pro libovolný bod P množiny $\mathcal{B}$ a jeho obraz P' v téže souměrnosti platí

$$\varepsilon = \frac{|F_1P|}{|HP|} = \frac{|F_2P'|}{|H'P'|} = \frac{|F_2P|}{|H'P|} \Longrightarrow \frac{|F_1P| + |F_2P|}{|HP| + |H'P|} = \frac{\varepsilon|HP| + \varepsilon|H'P|}{|HP| + |PH'|} = \varepsilon.$$

Odtud a z obr. 9 obdržíme

$$|F_1P| + |F_2P| = |HH'| \cdot \varepsilon = 2|OS| \cdot \varepsilon = 2\frac{a^2}{e} \cdot \frac{e}{a} = 2a.$$

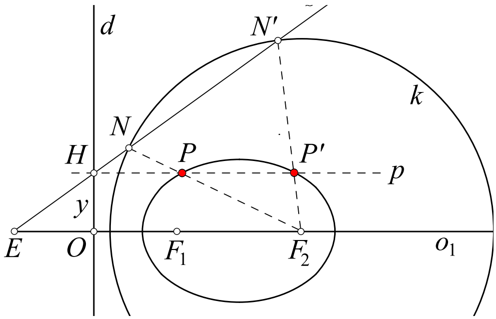


Obr. 9 K důkazu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ užitím symetrie

Poznámka 3

Důkaz věty 4 odhalil poznatek, že kolmý průmět H bodu P elipsy na řídicí přímku leží na přímce EN. Tento fakt umožňuje jednoduchou konstrukci těch bodů elipsy, jež mají od hlavní osy o_1 vzdálenost y:

Bodem H zvoleným na přímce d ve vzdálenosti $y \leq b$ od osy o_1 vedeme přímku $p \parallel o_1$. Bod N sestrojíme jako průsečík polopřímky EH s řídicí kružnicí k a hledaný bod P je průsečíkem přímky p s úsečkou NF_2. Na obr. 10 jsou sestrojeny dva z možných čtyř takových bodů.

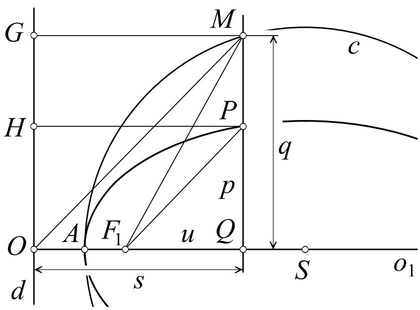


Obr. 10 Konstrukce bodů elipsy, které mají od hlavní osy vzdálenost y

Věta 5

Definice 2 a 3 jsou ekvivalentní.

Důkaz. Máme dokázat $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Víme, že $o_1 \cap \mathcal{C} = \{A, B\} = o_1 \cap \mathcal{B}$. Nechť $M \notin o_1$ je bod vrcholové kružnice $c = c_{F_1 O, \varepsilon}$, Q je jeho kolmý průmět na osu o_1 a P je ten bod množiny $\mathcal{B}$, který leží na polopřímce QM.



Obr. 11 K důkazu věty 5

Při označení podle obr. 11 platí

$$|PF_1| = \varepsilon s < \varepsilon \cdot |MO| = |MF_1|.$$

Proto leží bod P uvnitř úsečky QM. Navíc je jen jeden, neboť délka $|XF_1|$ roste se vzdáleností $|XQ|$ bodu X polopřímky QM.

Z podmínky (1) pro bod P a faktu $M \in c$ dostáváme

$$\frac{|PF_1|^2}{|Pd|^2} = \varepsilon^2 \quad \text{a} \quad \frac{|MF_1|^2}{|MO|^2} = \varepsilon^2.$$

Levé strany obou vztahů vyjádříme pomocí symbolů p, q, s, u vyznačených na obr. 11 a po úpravě dostaneme

$$u^2 + p^2 = \varepsilon^2 s^2 \quad \text{a} \quad u^2 + q^2 = \varepsilon^2 s^2 + \varepsilon^2 q^2.$$

Odečtením obou rovností získáme

$$p^2 = q^2(1 - \varepsilon^2) = q^2 \nu^2$$

(neboť z (6) plyne $1 - \varepsilon^2 = \nu^2$) a odtud po odmocnění vztah (2).

Dokázali jsme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Přepokládejme obráceně, že $P \in \mathcal{C}$ a $P \notin o_1$. Analogickým postupem sestrojíme polopřímku QP s bodem M v jejím průsečíku s kružnicí c a pomocí obr. 11 zjistíme

$$p^2 = \nu^2 q^2 \quad \text{a} \quad u^2 = |F_1 M|^2 - q^2 = \varepsilon^2(s^2 + q^2) - q^2 = \varepsilon^2 s^2 - \nu^2 q^2.$$

Odtud $p^2 + u^2 = \varepsilon^2 s^2$, neboli $|PF_1| = \varepsilon \cdot |Pd|$.

Závěr

Cílem článku bylo seznámit čtenáře s netradičním pohledem na elipsu. Průzkum jejích vlastností s využitím Apolloniových kružnic odhalil konstrukci bodů elipsy, s kterou jsme se v literatuře nesetkali. Postup lze aplikovat i na hyperbolu. Článek je však vzhledem k rozsahu a původnímu zaměření omezen jen na elipsu. Souvislosti s ostatními kuželosečkami zveřejníme v dalším příspěvku.

Literatura

[1] *Leischner, P.*: Polibky kružnic – Intermezzo. MFI, roč. 24 (2015), č. 3, s. 177–184. Dostupné na: http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/issue/view/16