Důkazy a důkazové úlohy v planimetrii

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problematika různých typů a metod použitých důkazů v planimetrii je určena především matematicky zdatnějším středoškolákům a jejich učitelům. Cílem tohoto příspěvku je prezentace základních důkazových metod (viz např. [4]) při řešení (několika) vybraných úloh z oblasti elementární geometrie.

Připomeňme ještě, že mezi základní typy důkazů metrických a polohových vlastností v planimetrii řadíme důkazy shodnosti dvojice úseček, shodnosti dvojice úhlů, rovnoběžnosti dvojice přímek, kolmosti dvojice přímek, kolinearity tří a více bodů v rovině (tři a více bodů leží na téže přímce), konkurentnosti tří a více přímek v rovině (tři a více přímek prochází společným bodem), koncykličnosti čtyř a více bodů v rovině (čtyři a více bodů leží na téže kružnici) [5, 6, 7].

Při řešení základních typů důkazových úloh lze využít rozmanitých technik, které jsou však obecněji zařazeny mezi čtyři známé (a to nejen v geometrii používané) metody důkazů, viz [4]. Jedná se především o *důkaz přímý*, dále o *důkaz nepřímý*, kdy dokazujeme větu ve tvaru implikace výroků (výrokových forem) za použití obměněné (kontraponované) věty. Pro důkaz obměněné věty pak použijeme jinou důkazovou metodu. Kromě těchto dvou základních metod se při důkazech v planimetrii nezřídka setkáváme také s důkazy *sporem* a s důkazy využívající *princip matematické indukce*. Zvláštní postavení při řešení důkazových úloh zaujímá tzv. *úplná indukce*, která využívá rozkladu nekonečné množiny zkoumaných objektů na třídy, jichž je *konečně mnoho*. Důkaz pak stačí provést vždy pro jednoho reprezentanta uvažované třídy rozkladu.

V další části příspěvku budou prezentována řešení některých vybraných důkazových úloh, a to za použití konkrétních výše uvedených důkazových metod.

Přímý důkaz

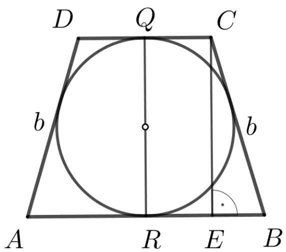
V následujícím (prvním) příkladu bude prezentován přímý důkaz jednoduché výrokové formy, ve druhém příkladu je pak uvedena ukázka přímého důkazu složené výrokové formy ve tvaru logické ekvivalence.

Příklad 1

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník ($AB \parallel CD$), jemuž lze vepsat kružnici. Dokažte, že její průměr je geometrickým průměrem délek obou základen.

Řešení. Uvažujme tečnový rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. Nechť k je kružnice jemu vepsaná a r její poloměr. Označme dále délky jeho stran $|AB| = a$, $|CD| = c$ ($a > c$) a $|BC| = |DA| = b$. Protože lichoběžník $ABCD$ je tečnový, platí

$$a + c = 2b. \tag{1}$$



Obr. 1

Body dotyku kružnice k se základnami AB, CD označme po řadě R, Q. Vzhledem k tomu, že lichoběžník je rovnoramenný, jsou body R a Q středy jeho základen. Zřejmě také $|QR| = 2r = d$, kde d je průměr kružnice k. Označme dále E patu kolmice z vrcholu C k základně AB. Pak platí $|QR| = |CE|$, a $QREC$ je tudíž pravoúhelník o stranách délek $\frac{1}{2}c$, d. Trojúhelník BCE je pravoúhlý, kde $|EB| = \frac{1}{2}(a - c)$. Z Pythagorovy věty konečně plyne (viz obr. 1)

$$d^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Po dosazení za $b = \frac{1}{2}(a + c)$ z (1) dostáváme po snadné úpravě $d^2 = ac$, tj. $d = \sqrt{ac}$, což jsme chtěli dokázat.

Komentář: V důkazu jsme vycházeli ze známých skutečností a faktů. Vytvořením postupného řetězce několika platných, na sebe navazujících implikací, jsme došli k dokazovanému tvrzení, viz např. [4]. Podobně postupujeme i v následující úloze.

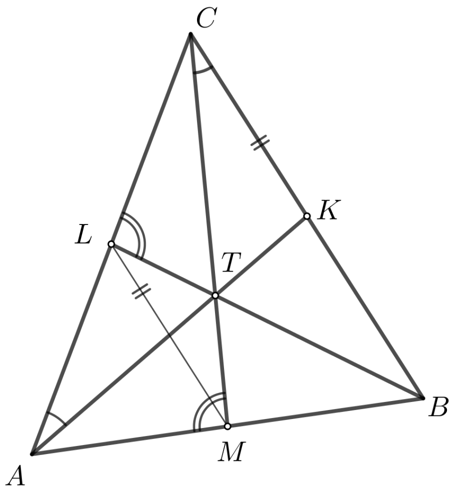
Příklad 2

Nechť K, L, M jsou po řadě středy stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CAK|$ platí, právě když $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$.

Řešení.

(i) Předpokládejme nejprve, že $|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CAK|$. Označme T těžiště trojúhelníku ABC. Úsečka ML je střední příčkou v trojúhelníku ABC, a je tedy rovnoběžná se stranou BC. Přímka CM protíná rovnoběžky BC a ML v bodech C a M, takže z vlastnosti střídavých úhlů a uvedeného předpokladu plyne

$$|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle LMT| = |\sphericalangle LAT| = |\sphericalangle CAK|.$$



Obr. 2

Odtud plyne, že $AMTL$ je tětivový čtyřúhelník, neboť velikost vnitřního úhlu AMT je rovna velikosti vnějšího úhlu u protějšího vrcholu L.

Platí tedy

$$|\sphericalangle AMT| = |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle CLT|,$$

a tudíž $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$. Tím je důkaz části (i) uzavřen.

(ii) Nechť naopak platí $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$. Obrácenou implikaci snadno dokážeme provedením opačného postupu. Vyjdeme přitom ze skutečnosti, že čtyřúhelník $AMTL$ je tětivový.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Následující úloha je určena pro čtenáře k procvičení metody přímého důkazu, k jejímu řešení lze využít například vhodně zvoleného otočení.

Příklad 3 Jsou dány dva různé čtverce $ABCD$ a $DKLM$ se společným vrcholem D (vrcholy jsou popsané ve stejném smyslu). Označme E střed úsečky AM a F patu kolmice z bodu D k přímce CK. Dokažte, že body D, E, F leží na téže přímce (jsou kolineární).

Nepřímý důkaz a důkaz sporem

Při řešení následující úlohy bude prezentována metoda *nepřímého důkazu* a současně i metoda *důkazu sporem* (v důkazu obměněné věty).

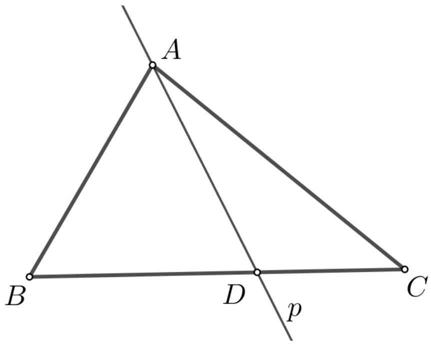
Příklad 4

Nechť trojúhelník ABC nemá žádné dvě strany shodné, pak jej nelze rozdělit žádnou příčkou na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky. Dokažte.

Řešení. Úlohu dokážeme nepřímo. Uveďme nejprve obměněnou větu k větě dané: Pokud trojúhelník ABC lze rozdělit některou příčkou na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky, pak aspoň dvě jeho strany jsou shodné. Důkaz tohoto tvrzení (ve tvaru implikace) provedeme sporem.

Předpokládejme, že trojúhelník ABC lze rozdělit na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky a přitom žádné dvě jeho strany nejsou shodné. To lze učinit pouze pomocí příčky trojúhelníku, která prochází jedním vrcholem a protíná jeho protější stranu. Bez újmy na obecnosti veďme vrcholem A přímku p tak, aby protľala stranu BC v bodě D. Přímka p rozdělí trojúhelník ABC na dva nepřekrývající se trojúhelníky ADC a ADB (obr. 3) se společnou stranou AD. Předpokládáme dále, že tyto trojúhelníky jsou shodné, tj. platí buď $|CD| = |BD|$ a současně $|AC| = |BC|$, nebo $|CD| = |AB|$ a současně $|BD| = |AC|$. Dokážeme, že ani jedna z výše uvedených možností nenastane.

Pokud $|CD| = |BD|$ a současně $|AC| = |BC|$, je trojúhelník ABC rovnoramenný, a tudíž aspoň dvě jeho strany jsou shodné, což je spor s předpokladem.



Obr. 3

Je-li $|CD| = |AB|$ a současně $|BD| = |AC|$, mají shodné trojúhelníky ADC a DAB shodné odpovídající si úhly při vrcholech A a D, tj. $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADB|$, $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle BAD|$. Body B, C, D leží na téže přímce, tudíž úhel BDC je přímý. Zřejmě pak

$$|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$$

a body A, B, C jsou kolineární, což je opět spor, neboť A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.

Přímka procházející vrcholem trojúhelníku ABC a protínající protější stranu tedy nemůže rozdělit trojúhelník ABC na dva nepřekrývající se shodné trojúhelníky, pro něž platí $|AC| = |BD|$. Tím je důkaz uzavřen.

Následující úloha poslouží k procvičení techniky důkazu sporem.

Příklad 5 (40. Turnaj měst, 2018/2019)

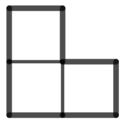
Nechť vnitřní úhel při vrcholu A rovnoběžníku $ABCD$ je ostrý. Na straně AB je zvolen bod N tak, že $|CN| = |AB|$. Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku CBN se dotýká přímky AD. Dokažte, že jejím dotykovým bodem je vrchol D.

Užití principu matematické indukce

V řadě důkazových úloh z oblasti tzv. kombinatorické geometrie, v nichž se jedná o vyplnění pravoúhlých tabulek danými polyminy, se často využívá principu matematické indukce. Následující úloha je toho dokladem.

Příklad 6

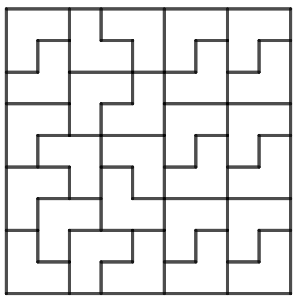
Dokažte, že pro všechna $n = 6k + 3$, kde k je přirozené číslo, lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit L-triminy, tj. triminy ve tvaru písmene L (obr. 4).



Obr. 4

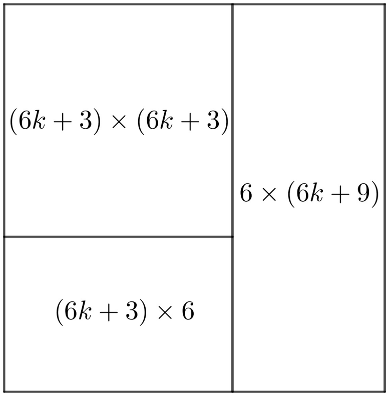
Řešení. Ukážeme, že pro každé $k \geq 1$, tj. pro $n = \{9, 15, 21, \ldots\}$, lze tabulku $(6k+3)\times(6k+3)$ vyplnit požadovaným způsobem. Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce vzhledem ke k.

(i) Pro $k = 1$ (tj. pro čtvercovou tabulku 9×9) je jedno z možných vyplnění tabulky uvedeno na obr. 5.



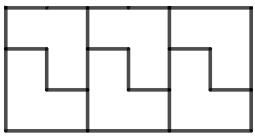
Obr. 5

(ii) Předpokládejme dále, že tabulku $(6k + 3) \times (6k + 3)$ pro určité $k \geq 1$ lze L-triminy vyplnit požadovaným způsobem. Ukážeme, že pomocí L-trimin lze vyplnit také čtvercovou tabulku pro $k + 1$, tj. tabulku $(6k + 9) \times (6k + 9)$.



Obr. 6

Část takové čtvercové tabulky o rozměrech $(6k+3)\times(6k+3)$, vlevo nahoře na obr. 6 doplníme o blok $(6k+3)\times 6$ (obr. 6, vlevo dole) a o blok $6\times(6k+9)$ vpravo tak, abychom dostali čtvercovou tabulku $(6k+9)\times(6k+9)$. Oba bloky jsou typu $6\times 3\ell$, kde ℓ je přirozené číslo, přičemž každý blok typu 6×3 lze snadno vyplnit požadovaným způsobem, viz např. obr. 7.



Obr. 7

Tím je dokázáno tvrzení také pro $k+1$.

Spojením obou kroků (i) a (ii) je tak dokázáno, že dané tvrzení platí pro všechny čtvercové tabulky typu $(6k+3)\times(6k+3)$, kde $k\geq 1$.

Příklad 7 (53. MO – C–I–1)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n\times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a obdélníky 3×1.

Příklad 8 (5. Srbská MO, 1998)

Dokažte, že pravoúhelníkovou tabulku $6m \times 2n$, kde m, n jsou přirozená čísla ($n > 1$), lze vyplnit (bez překrývání) L-triminy z příkladu 5, přičemž žádný obdélník typu 3×2 není vyplněn dvěma L-triminy.

Úplná indukce

Na závěr uvedeme ukázku důkazu klasického tvrzení z oblasti výpočetní geometrie, který využívá *úplnou indukci.*

Příklad 9 (kosinová věta)

V libovolném trojúhelníku ABC se stranami $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ a vnitřními úhly α, β, γ (při obvyklém označení), platí

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dokažte.

Řešení. Každý trojúhelník je buď ostroúhlý, nebo pravoúhlý, nebo tupoúhlý (náleží tedy právě do jedné třídy rozkladu množiny všech trojúhelníků). Tvrzení nyní dokážeme pro libovolného reprezentanta každé třídy.

(i) Ostroúhlý trojúhelník ABC ($\alpha < 90°$). Uvažujme výšku v_c ke straně AB, její patu označme V_c. Nechť $|AV_c| = x$; zřejmě $c > x$. Pravoúhlé trojúhelníky AV_cC a CV_cB mají shodnou odvěsnu CV_c. Pro trojúhelník AV_cC z Pythagorovy věty plyne $v_c^2 = b^2 - x^2$ a dále $x = b\cos\alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku BV_cC platí $v_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, viz obr. 8(i). Odtud plyne

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

a po úpravě a dosazení za x obdržíme přímo kýžený vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(ii) Pravoúhlý trojúhelník ABC ($\alpha = 90°$). V tomto pravoúhlém trojúhelníku s přeponou a platí Pythagorova věta

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90°.$$

Tím je důkaz pro $\alpha = 90°$ proveden.

(iii) Tupoúhlý trojúhelník ABC ($\alpha > 90°$). Uvažujme výšku v_c ke straně AB, její patu označme V_c. Nechť $|AV_c| = x$, zřejmě $|V_cB| = x + c$ (obr. 8). V pravoúhlém trojúhelníku AV_cC má úhel při vrcholu A velikost $180° - \alpha$, a tedy

$$x = b\cos(180° - \alpha).$$

Dále užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku AV_cC obdržíme rovnost

$$v_c^2 = b^2 - x^2$$

a v trojúhelníku BV_cC pak rovnost

$$v_c^2 = a^2 - (c + x)^2.$$

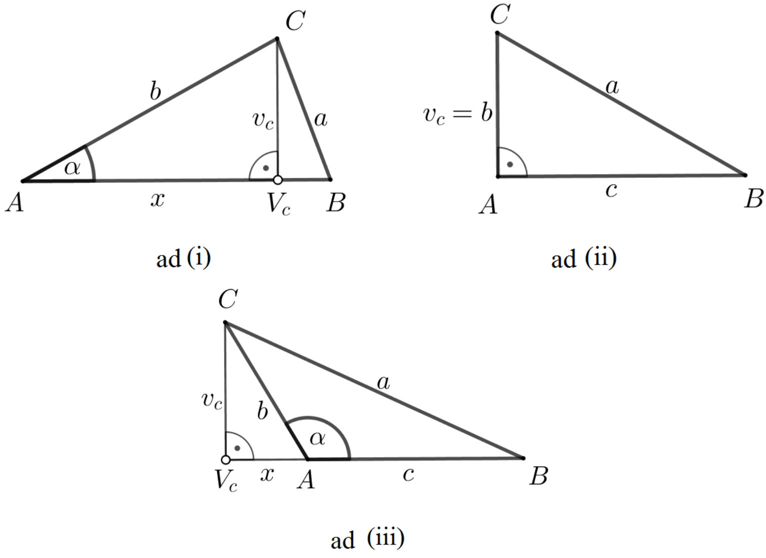
Porovnáním pravých stran obou posledních rovností a po snadné úpravě máme

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha).$$

Využitím rovnosti $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ konečně dostáváme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 8

Užitím principu úplné indukce jsme tak dokázali platnost kosinové věty pro možné velikosti úhlu α a tím je dokázána první ze tří uvedených rovností. Užitím principu cyklické záměny je pak dokázážeme i zbylé dvě rovnosti.

Závěrečnou úlohu, která je převzata z Britské MO (BMO), lze řešit opět užitím principu úplné indukce. Je třeba rozlišit tři případy pro velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B (ostrý, pravý a tupý úhel).

Příklad 10 (BMO 2018/2019)

Je dán trojúhelník ABC. Nechť ℓ je kolmice k přímce AB, která prochází vrcholem B. Kolmice k BC, která prochází vrcholem A, protíná přímku ℓ v bodě D a osa hrany BC protíná přímku ℓ v bodě P. Patu kolmice z bodu D k přímce AC označme E. Dokažte, že trojúhelník BPE je rovnoramenný.

Literatura

[1] *Geretschläger, R. – Kalinowski, J. – Švrček, J.*: A Central European Olympiad (The Mathematical Duel). World Scientific Publ., 2018.

[2] *Lakomá, L.*: Úlohy z planimetrie na SŠ. Diplomová práce, PřF UP, Olomouc, 1995.

[3] *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. The UK Mathematics Trust, 2009.

[4] *Odvárko, O a kol.*: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha, 1990,

[5] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? In: Sborník „Dva dny s didaktikou matematiky 2012“, vydavatelství PedF UK Praha, Praha, 2012, s. 58–62.

[6] *Švrček, J. – Zlámal, V.*: Čtyři body na kružnici. MFI, roč. 24 (2015), č. 5, s. 334–343.

[7] *Zlámal, V.*: O důkazech konkurentnosti přímek v rovině. MFI, roč. 27 (2018), č. 3, s. 161–168.