Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 253 a 254 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, případně v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 253

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ platí

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + xf(x).$$

Pavel Calábek

Úloha 254

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovující rovnici

$$x^2 + xy + y^2 = x + y + 5.$$

Jacek Uryga

Dále uvádíme řešení úloh 249 a 250, jejichž zadání jsme zveřejnili v pátém čísle loňského (27.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 249

V rámci městského tanečního festivalu vstoupilo i pět dívčích tanečních kroužků: hanácký, valašský, romský, slovenský a ukrajinský. Vystoupení se velmi líbila, ale nešlo o soutěž. Jitka s Bětkou si však řekly, že si stanoví výsledné pořadí alespoň pro sebe. Začaly tím, že hanácký kroužek dají výš než valašský, a rovněž že romský dají výš než ukrajinský.

Stanovte, kolik je možných různých výsledných pořadí za těchto dvou zadaných podmínek, jestliže navíc uvážíme, že na některých místech může být i více než jeden kroužek. *Stanislav Trávníček*

Řešení. Označme H, V, R, S, U po řadě kroužek hanácký, valašský, romský, slovenský a ukrajinský. Zápisem $A > B$ budeme mínit, že kroužek A bude zařazen před kroužek B, podobně $A = B$ že jsou na stejném místě. Podle zadání platí $H > V$, $R > U$. Máme určit počet pořadí kroužků, které splňují uvedené dva předpoklady, přičemž kroužky se mohou o dané pořadí dělit. Označme s počet různých pořadí, které zaujímají kroužky H, V, R, U. Zřejmě $s \in \{2, 3, 4\}$. Diskusí podle s dostaneme:

- Pokud $s = 2$, potom jediné možné umístění čtyř výše uvedených souborů je $H = R > V = U$. Slovenský kroužek může být před $H = R$, na stejném místě jako $H = R$, mezi $H = R$ a $V = U$, na stejném místě jako $V = U$ a konečně za $V = U$, celkem tedy pro něj máme $2s + 1 = 5$ možností. Proto podmínce $s = 2$ vyhovuje 5 možných pořadí souborů.
- Pro $s = 3$ jsou možná následující rozmístění výše uvedených čtyř souborů

  $$\begin{aligned} &H = R > V > U, \quad H = R > U > V,\\ &H > R = V > U, \quad H > R > V = U,\\ &R > H = U > V, \quad R > H > V = U. \end{aligned}$$

  Stejně jako v předcházejícím, slovenský kroužek můžeme umístit v každém pořadí na $2s + 1 = 7$ míst. Podmínce $s = 3$ tak vyhovuje $6 \cdot 7 = 42$ různých pořadí souborů.
- Pokud $s = 4$, žádný z kroužků H, V, R, U nemůže být na stejném pořadí. Pro tyto kroužky tak máme následující možnosti

  $$\begin{aligned} &H > R > V > U, \quad H > R > U > V, \quad H > V > R > U\\ &R > H > U > V, \quad R > H > V > U, \quad R > U > H > V \end{aligned}$$

  Slovenský kroužek můžeme u každého z těchto pořadí umístit na $2s + 1 = 9$ míst, celkem nám tak vychází $6 \cdot 9 = 54$ různých umístění daných souborů.

Podle zadaných pravidel tak můžeme pět kroužků umístit celkem

$$5 + 42 + 54 = 101$$

možnými způsoby.

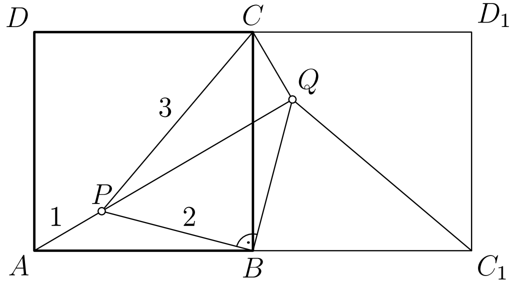
Poznámka. Redakce bohužel neobdržela žádné správné řešení, řešitelé vždy nějakou drobnou chybičkou byli blízko správné hodnoty 101.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy. *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Úloha 250

Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod P, pro který platí $|AP| = 1$, $|BP| = 2$ a $|CP| = 3$. Dokažte, že bod P' souměrně sdružený s bodem P podle přímky AB leží na kružnici opsané čtverci $ABCD$. *Jozef Mészáros*

Řešení. Uvažujme otočení se středem B a úhlem otočení $-90°$, které zobrazí vrchol A na vrchol C (viz obr. 1).



Obr. 1

Označme Q obraz bodu P v tomto otočení, tudíž PBQ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu B, kde $|\sphericalangle BQP| = 45°$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku PBQ plyne $|PQ| = 2\sqrt{2}$. Trojúhelník CPQ má délky stran $|PQ| = 2\sqrt{2}$, $|CQ| = |AP| = 1$, $|CP| = 3$. Podle věty obrácené k větě Pythagorově je tedy trojúhelník CPQ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q. Máme tak

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CP_1B| = |\sphericalangle BP_1P| + |\sphericalangle PP_1C| = 45° + 90° = 135°.$$

Tato skutečnost je již nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bod souměrně sdružený s bodem P podle přímky AB ležel na kružnici opsané čtverci $ABCD$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Podle kosinové věty lze dopočítat délku strany čtverce

$$|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \cos 135°} = \sqrt{1 + 4 + 2\sqrt{2}}.$$

Úlohu s podobnou tematikou můžete najít např. v knize E. Caldy *Matematika pod mikroskopem.*

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan. Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek