INFORMATIKA

Fuzzy logika

RADIM BĚLOHLÁVEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V článku se seznámíme s fuzzy logikou. K vytvoření fuzzy logiky vedly některé zásadní nedostatky klasické logiky, zejména její omezená schopnost pracovat s nepřesnými pojmy, tedy s pojmy, které člověk běžně používá. Fuzzy logika představuje moderní směr. Stala se důležitým pilířem umělé inteligence a nalezla uplatnění v mnoha výrobcích, které běžně používáme.

1. Vznik fuzzy logiky

Jen několikrát se v historii logiky stalo, že vznikla významná alternativa k hlavnímu proudu představovanému klasickou logikou. Jednou z takových alternativ je fuzzy logika. Vznikla zhruba před padesáti lety v pracích amerického inženýra a matematika Lotfiho Askera Zadeha (1921–2017). V roce 1965 zveřejnil časopis *Information and Control* jeho práci „Fuzzy sets“. Zadeh v této práci upozornil na to, že základní pojem klasické matematiky, pojem množiny, je v mnoha situacích nedostačující. Množiny reprezentují to, čemu běžně říkáme soubory nebo seskupení nějakých objektů. Seskupeným objektům se říká prvky dané množiny. Máme například množinu sudých čísel, jejímiž prvky jsou sudá čísla, nebo množinu států Spojených států amerických, která má padesát prvků. Charakteristickým rysem množin je, že libovolný prvek do dané množiny buď patří, nebo nepatří. To je v souladu se základním principem klasické logiky, podle kterého každé tvrzení, tedy i tvrzení „prvek patří do množiny“, je buď pravdivé, nebo nepravdivé. Zadeh upozornil na to, že seskupení, se kterými v běžném životě pracujeme, tento rys postrádají a jsou tedy zásadně jiná.

Tvoří například hodnoty (v torrech), odpovídající pojmu *normální krevní tlak* množinu?[1)] Do ní by jistě patřila hodnota 120 a naopak nepatřila

[1)] Myslíme systolický tlak.

hodnota 60. Musely by ale existovat hraniční hodnoty $t_1 < t_2$ ostře oddělující hodnoty normálního krevního tlaku. Krevní tlak t by tedy byl normální, právě když by byl mezi t_1 a t_2.[2)] Pak by ale pro libovolně malou odchylku ε krevní tlak $t_1 - \varepsilon$ nebyl normální, zatímco tlak $t_1 + \varepsilon$ by normální byl. To je ale absurdní (představme si třeba $\varepsilon = 0{,}1$) – tak přece člověk pojem *normální krevní tlak* nechápe.

Obr. 1 Lotfi Zadeh v roce 2004.

Zadeh si všiml, že klasický pojem množina je v situacích podobných té výše popsané nedostatečný. Ukázal, že z hlediska aplikací je toto pozorování zcela zásadní, že tedy nejde o nějaký okrajový jev, o anomálii, která je zajímavá jen z teoretického hlediska. Výrazy jako „vysoká venkovní teplota", „nízké otáčky motoru", „nadváha" a podobně – tvrdil Zadeh – jsou v našem každodenním uvažování a rozhodování všudypřítomné a nevyhnutelné. Abychom s nimi mohli pracovat, navrhl Zadeh nový pojem – pojem fuzzy množiny – který zmíněné nedostatky nemá. Základní myšlenka fuzzy logiky spočívá v tom, že příslušnost prvku k fuzzy množině je otázkou míry – nemá povahu buď-anebo rozhodování, a není tedy „černobílá". Po padesáti letech lze konstatovat, že Zadehův nápad byl neobyčejně úspěšný. Jeho práce o fuzzy množinách z roku 1965 patří mezi nejcitovanější práce v historii matematiky, logiky a informatiky a vedla k rozvoji fuzzy logiky jako nové vědní oblasti. Ta má dnes nejen propracované teoretické základy, ale může se pochlubit i obrovským komerčním úspěchem. S trochou nadsázky lze říci, že fuzzy logika je všude kolem nás.

[2)] Pro naši úvahu je nepodstatné, zda to znamená $t_1 < t < t_2$, nebo $t_1 \leq t \leq t_2$.

2. Fuzzy množiny

Nevhodnost pojmu klasická množina, o které jsme hovořili výše, plyne z toho, že výroku „objekt x patří do množiny A“ je klasická matematika v souladu s principy klasické logiky ochotna přiznat pouze dvě možné pravdivostní hodnoty – *pravda* a *nepravda*, někdy označované 1 a 0. Fuzzy logika tento princip, zvaný *princip bivalence*, nepřijímá. Podle fuzzy logiky může být výrok pravdivý i jen do určité míry, tj. pravdivý v určitém stupni, který je mezi 0 a 1, např. 0,8. Stupně pravdivosti představují zobecněné pravdivostní hodnoty, přičemž klasické pravdivostní hodnoty 0 a 1 jsou jejich hraničními případy. Tedy například zatímco výrok „120 torrů je normální krevní tlak“ má v souladu s předchozí úvahou pravdivostní hodnotu 1 a výrok „60 torrů je normální krevní tlak“ hodnotu 0, výroku „100 torrů je normální krevní tlak“ můžeme přiřadit pravdivostní hodnotu 0,5. Tím vyjádříme, že krevní tlak 100 torrů sice není úplně normální, ale do jisté míry ano.

Tak lze hovořit o fuzzy množině A hodnot normálního krevního tlaku. Klasickou množinu A lze chápat jako zobrazení

$$A\colon U \to \{0, 1\},$$

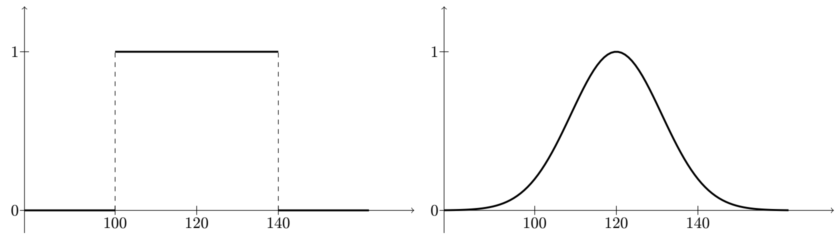
které každému prvku u z daného univerza U uvažovaných prvků přiřadí 1 (tedy $A(u) = 1$), pokud u patří do A, a které mu přiřadí 0, pokud u do A nepatří. Fuzzy množina v univerzu U je pak zobrazení

$$A\colon U \to [0, 1], \tag{1}$$

které každému prvku u z U přiřadí stupeň $A(u)$ náležení prvku u do fuzzy množiny A. Čím větší je $A(u)$, tím více prvek u do A patří. Obr. 2 ukazuje klasickou množinu a fuzzy množinu, které popisují pojem *normální krevní tlak*.

Fuzzy množiny, na rozdíl od klasických, nejsou černobílé, nemají ostré hranice – mezi možnostmi „být prvkem“ (1) a „nebýt prvkem“ (0) je celá škála mezilehlých možností, totiž „být prvkem v jistém stupni“ (např. ve stupni 0,8). Tyto stupně nemusí tvořit celý interval $[0, 1]$, jako tomu bylo výše, viz (1). Můžeme uvažovat i konečnou množinu L pravdivostních hodnot, například $L = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. V tomto případě bychom tyto stupně náležení do fuzzy množiny chápali například jako „vůbec ne“, „jen trochu“, „částečně“, „do značné míry“, a „zcela“ a fuzzy množina by byla zobrazením

$$A\colon U \to \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}. \tag{2}$$

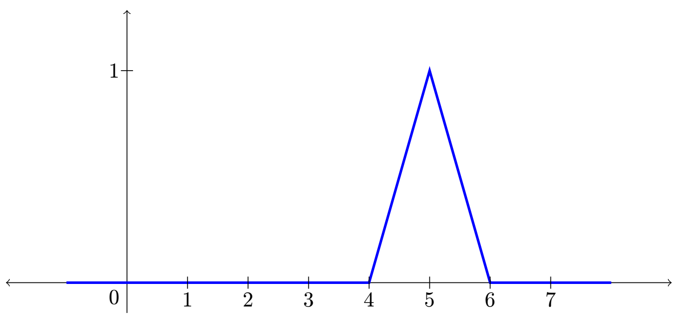


Obr. 2 Normální krevní tlak jako klasická množina (vlevo) a jako fuzzy množina (vpravo)

Příklad 1. Nechť $U = \mathbb{R}$ (reálná čísla), $L = [0, 1]$. Uvažujme fuzzy množinu $A\colon U \to L$ definovanou takto:

$$A(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u < 4, \\ x - 4 & \text{pro } 4 \leq u \leq 5, \\ 6 - x & \text{pro } 5 < u \leq 6, \\ 0 & \text{pro } u > 6. \end{cases}$$

Tato fuzzy množina reprezentuje možný význam výrazu „přibližně 5“ a je znázorněna na obr. 3.



Obr. 3 Fuzzy množina reprezentující výraz „přibližně 5“

Příklad 2. Výraz „dobré (formální) vzdělání“ můžeme reprezentovat fuzzy množinou $A\colon U \to \{0, 0{,}1, \ldots, 0{,}9, 1\}$ v univerzu

$$U = \{\text{žádné}, \text{základní}, \text{střední}, \text{Bc.}, \text{Ing.}, \text{Mgr.}, \text{Ph. D.}\},$$

která je definovaná takto:

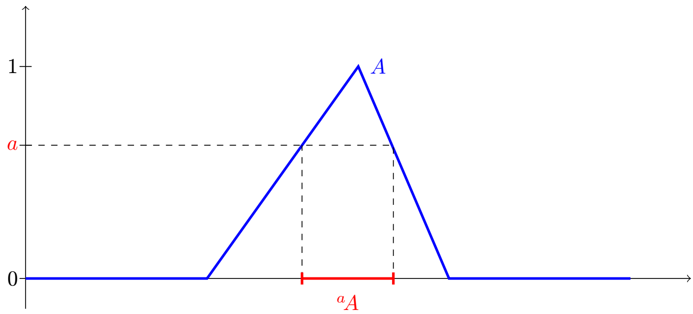
$$A = \{{}^{0}/\text{žádné}, {}^{0,1}/\text{základní}, {}^{0,5}/\text{střední}, {}^{0,8}/\text{Bc.}, {}^{0,9}/\text{Ing.}, {}^{0,9}/\text{Mgr.}, {}^{1}/\text{Ph.\,D.}\}.$$

Tento zápis znamená, že $A(\text{Bc.}) = 0{,}8$ atp.

Důležitým pojmem, který propojuje klasické a fuzzy množiny, je pojem řez. Pokud a je pravdivostní hodnota, pak *a-řez* fuzzy množiny A v univerzu U je klasická podmnožina ${}^{a}A$ množiny U definovaná předpisem

$${}^{a}A = \{u \in U \;\mid A(u) \geq a\}.$$

Řez ${}^{a}A$ tedy obsahuje ty prvky, které do A patří ve stupni a nebo vyšším. Pojem řezu ilustruje obr. 4.



Obr. 4 a-řez fuzzy množiny A

Příklad 3. Uvažujme fuzzy množinu

$$A = \{{}^{0,2}/u_1, {}^{0,6}/u_2, {}^{0,1}/u_3, {}^{0,8}/u_4, {}^{1}/u_5\}.$$

Její a-řezy pro $a = 0{,}1$, $a = 0{,}4$, $a = 0{,}5$ a $a = 1$ jsou

$$\begin{aligned} {}^{0,1}A &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\},\\ {}^{0,4}A &= \{u_2, u_4, u_5\},\\ {}^{0,5}A &= \{u_2, u_4, u_5\},\\ {}^{1}A &= \{u_5\}. \end{aligned}$$

Význam řezů spočívá v tom, že umožňují fuzzy množiny reprezentovat pomocí klasických množin. Pro danou fuzzy množinu $A\colon U \to L$ můžeme totiž uvažovat systém všech jejích a-řezů, tedy systém

$$\{{}^{a}A \mid a \in L\}.$$

To je systém klasických množin. Z tohoto systému lze v případě potřeby původní fuzzy množinu sestrojit. To si ukážeme za zjednodušujícího předpokladu, že množina L pravdivostních hodnot je konečná. Jak se snadno přesvědčíme, platí pak

$$A(u) = \max\{a \in L \mid u \in {}^{a}A\}.$$

Tedy stupeň $A(u)$, ve kterém u patří do A, se rovná největšímu stupni a, který má tu vlastnost, že příslušný řez ${}^{a}A$ obsahuje prvek u.

3. Fuzzy logika jako logika

Odmítnutí principu bivalence, tj. připuštění možnosti, že existují výroky, které nemusí být (úplně) pravdivé, ani (úplně) nepravdivé, je radikální krok. Tímto krokem totiž opouštíme svět klasické logiky důvěrně známý od doby Aristotela. Opouštíme tím také svět, ve kterém se od antiky rozvíjela veškerá matematika, přírodovědné i humanitní obory, i celá západní filozofie. Nový svět, do kterého vstupujeme, je světem jiné logiky. Zda je tato logika – tedy fuzzy logika – životaschopnou, plnohodnotnou alternativou logiky klasické a zda se může stát, podobně jako se stala logika klasická, základem matematiky – tentokráte však matematiky jiné – a metodickým základem dalších oborů, je zásadní, mnohovrstevná a značně složitá otázka. V této kapitole se pokusíme ukázat některé z principů fuzzy logiky jako formální logiky.

Věnujme se nejprve otázce logických spojek ve fuzzy logice. Jak víme, v klasické logice je logická spojka popsána tabulkou, která popisuje její význam (její tzv. pravdivostní funkci). Například tabulka konjunkce vypadá takto:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Stejně jako v klasické logice musí i ve fuzzy logice konjunkce přiřazovat dvěma pravdivostním hodnotám, a a b, výslednou pravdivostní hodnotu $a \wedge b$,[3)] a to tak, aby $a \wedge b$ byla pravdivostní hodnota konjunkce dvou tvrzení, z nichž jedno má pravdivostní hodnotu a a druhé b. Přirozenou

[3)] Správně bychom měli odlišovat symbol spojky, $\wedge$, od pravdivostní funkce, $\wedge^{\cdot}$. Pro jednoduchost budeme obojí označovat stejným symbolem, $\wedge$.

možností ve fuzzy logice je definovat

$$a \wedge b = \min(a, b).$$

Pokud je tedy výrok „Je zima." pravdivý ve stupni 0,5 (tj. má pravdivostní hodnotu 0,5) a výrok „Je jasno." ve stupni 0,8, je výrok „Je zima a je jasno." pravdivý ve stupni 0,5, neboť $0{,}5 = \min(0{,}5, 0{,}8)$. Tato konjunkce se nazývá Gödelova, protože jako první použil minimum jako vícehodnotovou konjunkci významný logik a brněnský rodák Kurt Gödel.

Existuje však i jiná možnost, která se ve fuzzy logice používá, tzv. Goguenova konjunkce, která je definována předpisem

$$a \wedge b = a \cdot b.$$

Pak by konjunkce výše zmíněných výroků byla pravdivá ve stupni 0,4, neboť $0{,}4 = 0{,}5 \cdot 0{,}8$. Třetí možností je pak tzv. Łukasiewiczova konjunkce, která je definovaná předpisem

$$a \wedge b = \max(0, a + b - 1).$$

Grafy těchto tří uvedených konjunkcí vidíme na obr. 5.

Z těchto grafů je zřejmé, že všechny tyto konjunkce mají společné jisté vlastnosti. Všimněme si nejdříve, že všechny rozšiřují (zobecňují) klasickou konjunkci, a to v tom smyslu, že jsou-li jejich argumenty a a b hodnoty 0 nebo 1, dávají stejný výsledek jako klasická konjunkce. Všechny také splňují následující podmínky:

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \tag{3}$$

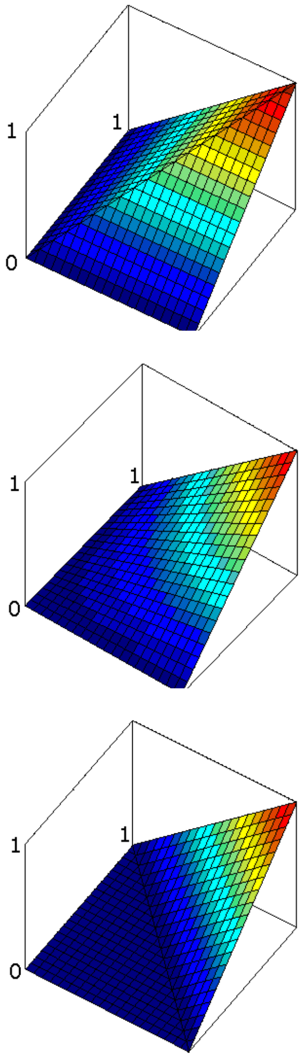
$$a \wedge b = b \wedge a, \tag{4}$$

$$\text{je-li } a \leq b \text{ pak } a \wedge c \leq b \wedge c, \tag{5}$$

$$a \wedge 1 = a. \tag{6}$$

To jsou základní vlastnosti, které konjunkce ve fuzzy logice musí splňovat. Uvedené tři konjunkce jsme nevybrali náhodou. Omezíme-li se na konjunkce, které jsou navíc jako funkce spojité,[4)] pak lze ukázat, že každou konjunkci lze jistou konstrukcí sestrojit z Gödelovy, Goguenovy a Łukasiewiczovy konjunkce.

[4)] Pokud čtenář nezná pojem spojitosti funkce, může si představit, že graf takové funkce neobsahuje žádné skoky, tj. není nikde přerušený.



Obr. 5 Tři základní konjunkce ve fuzzy logice: nahoře Gödelova (minimum), uprostřed Goguenova (součin), dole Łukasiewiczova

Logické spojky jsou v klasické logice základem pro logické odvozování, pro operace s množinami i pro další konstrukce, které mají logickou povahu. Ve zbytku této kapitoly naznačíme, jak je tomu ve fuzzy logice.

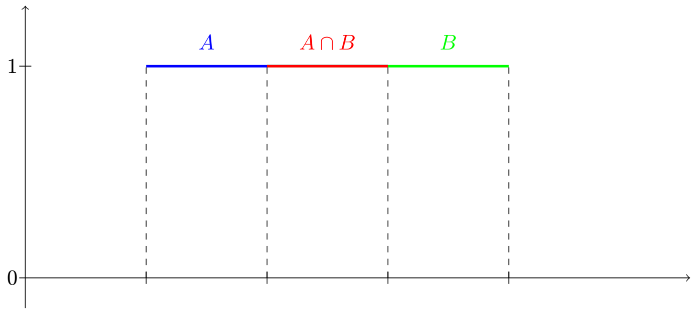
Uvažujme klasické množiny A a B. Jejich průnik, $A \cap B$, je definován předpisem

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ a } u \in B\}.$$

Pro naše potřeby teď budeme tyto množiny chápat jako funkce příslušnosti $A\colon U \to \{0,1\}$ a $B\colon U \to \{0,1\}$ v daném univerzu U, tj. $A(u) = 1$ znamená, že u patří do A. Snadno vidíme, že průnik lze popsat takto:

$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

Výraz $\min(A(u), B(u))$ přitom odpovídá tomu, že aplikujeme klasickou konjunkci (ta je vyjádřena funkcí min) na pravdivostní hodnoty $A(u)$ a $B(u)$. Tento průnik je znázorněn na obr. 6.



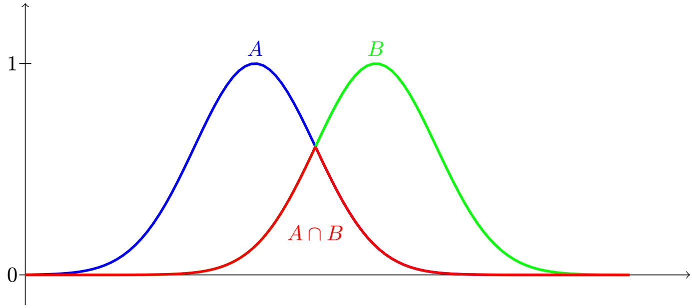
Obr. 6 Průnik klasických množin

Ve fuzzy logice se průnik fuzzy množin $A\colon U \to [0,1]$ a $B\colon U \to [0,1]$ definuje v principu stejně, tedy opět předpisem

$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

Rozdíl je v tom, že $A(u)$ a $B(u)$ jsou nyní obecné stupně pravdivosti z intervalu $[0,1]$ a že min reprezentuje Gödelovu konjunkci. Takový průnik fuzzy množin je znázorněn na obr. 7.

Příklad 4. Určíme průnik fuzzy množin A a B v univerzu $U = \{1,2,3,4,5\}$.

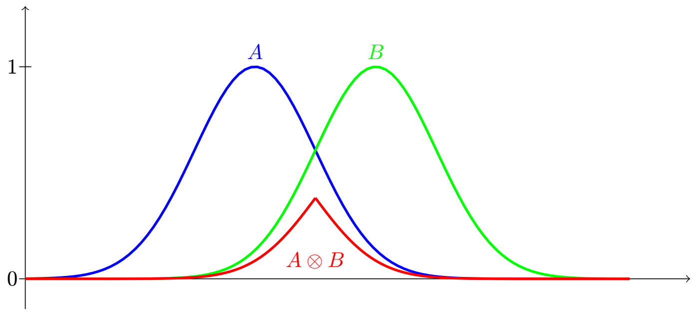


Obr. 7 Průnik fuzzy množin založený na Gödelově konjunkci

Je-li

$$\begin{aligned} A &= \{{}^{1}/2, {}^{0,5}/3, {}^{0,8}/5, {}^{1}/6\} \text{ a} \\ B &= \{{}^{1}/1, {}^{0,2}/3, {}^{0,5}/4, {}^{0,8}/5\}, \text{ je} \\ A \cap B &= \{{}^{0,2}/3, {}^{0,8}/5\}. \end{aligned}$$

Pro jinou konjunkci, řekněme $\otimes$, by ale průnik vypadal jinak. Ukazuje to obr. 8.



Obr. 8 Průnik fuzzy množin založený na obecné konjunkci $\otimes$

Je to proto, že takový průnik je definován předpisem

$$(A \cap B)(u) = A(u) \otimes B(u)$$

a proto, že každá konjunkce $\otimes$, splňující výše uvedené podmínky (3)–(6), splňuje $a \otimes b \leq \min(a, b)$.

Nemůžeme se zde podrobněji věnovat formálním aspektům fuzzy logiky. Uvedeme pouze, že stejně jako klasická logika má solidně propracované základy v podobě výrokové logiky, predikátové logiky a dalších systémů, má dnes i fuzzy logika solidně propracované základy. Zájemce odkazujeme na knihu [1]. Abychom alespoň stručně nastínili, jak ve fuzzy logice probíhá formální logické usuzování, podíváme se na tzv. paradox hromady (nazývaný také sorites).

Je to významný paradox, jehož formulace je připisována Eubúlidovi z Milétu (4. stol. př. n. l.). Je formulován takto:

0 zrnek písku netvoří hromadu.

Když n zrnek netvoří hromadu, pak ani $n+1$ zrnek netvoří hromadu.

Závěr: Pro žádné číslo n netvoří n zrnek písku hromadu.

Závěr je evidentně nepravdivý, ale odvodili jsme ho všeobecně používanou metodou matematické indukce z předpokladů, které považujeme za pravdivé, což je paradox.

Fuzzy logika nabízí přirozené řešení tohoto paradoxu. To samo o sobě je podstatná skutečnost, protože k rozřešení dlouhotrvajícího paradoxu je obvykle třeba prolomit hluboce zakořeněné, omezující paradigma. Toto paradigma je v našem případě pochopitelně představováno výše zmíněným principem bivalence, ze kterého klasická logika vychází.

Nechť $NH(n)$ označuje tvrzení, že n zrnek netvoří hromadu. Pak paradox hromady lze schematicky znázornit následovně:

$$\frac{\begin{array}{l} NH(0) \\ NH(n) \to NH(n+1) \end{array}}{\text{pro každé } n\text{: } NH(n)}$$

Z hlediska fuzzy logiky je přirozené přijmout, že $NH(0)$ je pravdivá ve stupni 1. Formuli

$$NH(n) \to NH(n+1)$$

je však přirozené považovat za pravdivou v nějakém vysokém stupni, řekněme 0,99, ale ne ve stupni 1. Jak ale z takových předpokladů, které jsou pravdivé jen částečně, odvozovat závěry? Fuzzy logika pro tento případ nabízí zobecněnou verzi odvozovacího pravidla *modus ponens.* Tu navrhl v roce 1968 ve své průlomové práci „The logic of inexact concepts“ americký informatik Joseph A. Goguen. Toto zobecněné pravidlo lze znázornit schématem

$$\frac{{}^{a}/\varphi,\, {}^{b}/\varphi \to \psi}{{}^{a \otimes b}/\psi},$$

které znamená, že z formule φ platné ve stupni a a formule $\varphi \to \psi$ platné ve stupni b můžeme odvodit, že formule ψ je platná ve stupni $a \otimes b$. Přitom $a \otimes b$ je výsledek konjunkce $\otimes$ použité na stupně a a b. Použijme, jak to učinil Goguen ve své práci z roku 1968, za konjunkci $\otimes$ součin, tedy

$$a \otimes b = a \cdot b.$$

V naší situaci můžeme tedy provést následující úsudky. Nejprve odvodíme

$$\frac{{}^{1}/\mathit{NH}(0),\, {}^{0,99}/\mathit{NH}(0) \to \mathit{NH}(1)}{{}^{0,99}/\mathit{NH}(1)}.$$

Stupeň 0,99 u odvozené formule $\mathit{NH}(1)$ jsme totiž získali jako stupeň $a \otimes b$ z výše uvedeného schématu, protože $a \otimes b = 1 \cdot 0{,}99 = 0{,}99$. Dále odvodíme

$$\frac{{}^{0,99}/\mathit{NH}(1),\, {}^{0,99}/\mathit{NH}(1) \to \mathit{NH}(2)}{{}^{0,99^2}/\mathit{NH}(2)},$$

protože v tomto případě $a \otimes b = 0{,}99 \cdot 0{,}99 = 0{,}99^2$. Snadno nahlédneme, že tak po n krocích odvodíme

$$\frac{{}^{0,99^{n-1}}/\mathit{NH}(n-1),\, {}^{0,99}/\mathit{NH}(n-1) \to \mathit{NH}(n)}{{}^{0,99^n}/\mathit{NH}(n)}.$$

Tento závěr říká, že tvrzení „n zrnek písku netvoří hromadu“ je pravdivé ve stupni $0{,}99^n$. Čím více zrnek, tím méně je tedy toto tvrzení pravdivé, což je v souladu s intuicí. Pro $n = 100$ tak odvodíme stupeň přibližně rovný 0,37.[5)] Paradox byl odstraněn. Pojem hromada je totiž „fuzzy pojem“, tedy pojem, který nemá – na rozdíl od klasických pojmů jako je třeba pojem prvočíslo – ostře vymezené, černobílé hranice. Předpokládat, že tvrzení „n zrnek písku netvoří hromadu“ může být jen pravdivé, nebo nepravdivé, jak činí formulace paradoxu hromady, je tedy nesprávné. To je důvod zdánlivého paradoxu.

[5)] Hodnotu 0,99 jsme zvolili pro ilustraci. Můžeme zvolit jinou hodnotu, např. 0,999, a získat tak jiné závěry, které se někomu mohou zdát lépe odpovídající tomu, jak chápe pojem *hromada*.

4. Od počátečního odporu k masovému nasazení

Připustit, že existují i jiné pravdivostní hodnoty než pravda a nepravda, je radikální krok. Zadehův pojem fuzzy množiny a obecněji pak fuzzy logika jako alternativa klasické logiky proto představuje – řečeno termínem Thomase Kuhna – nové paradigma.[6] Od Kuhna víme, že nové paradigma se prosazuje obtížně a je mu kladen odpor. Fuzzy logika v tomto směru nebyla výjimkou. Pro příklad uveďme, co řekl o fuzzy logice ještě v roce 1975 William Kahan, významný vědec a profesor na univerzitě v Berkeley: „Fuzzy logika je chybná, chybná a zničující. ... Co potřebujeme, je více, ne méně logického myšlení. Nebezpečí fuzzy teorie je v tom, že povzbudí právě ten typ nepřesného myšlení, který nám způsobil tolik problémů.“ [1].

Stále více lidí však začalo chápat, že fuzzy logika je životaschopnou alternativou logiky klasické a že – a to především – umožňuje řešit důležité problémy. Poměrně rychle se proto začal rozvíjet výzkum fuzzy logiky, který nakonec vedl k praktickým realizacím i k výrazným komerčním úspěchům.

Komerčně jednoznačně nejúspěšnější aplikací fuzzy logiky jsou tzv. pravidlové fuzzy systémy a na nich založené fuzzy regulátory. Jejich princip stručně vysvětlíme v příští kapitole. Fuzzy regulátory byly poprvé komerčně použity pro řízení cementové pece v dánské společnosti F. L. Smidth & Company v roce 1980. Obrovský rozmach, označovaný jako „fuzzy boom“, však zaznamenaly koncem 80. a začátkem 90. let v Japonsku. Fuzzy regulátory tam byly například nasazeny k řízení metra v městě Sendai. Vlaky se tak – bez zásahů lidského operátora, plně řízené fuzzy logikou – rozjížděly i zastavovaly plynuleji, byly schopné přesně zastavit na určeném místě a dokonce spotřebovávaly o 10 % méně energie. Tento úspěch později vedl k zavedení podobného systému i v Tokiu. Zejména se však fuzzy regulátory prosadily v nejrozmanitějších výrobcích na trhu se spotřební elektronikou. V obchodech se začaly ve velkém prodávat fuzzy logikou řízené fotoaparáty, pračky, vysavače, vařiče rýže a mnohé další výrobky. Podle záznamů japonského ministerstva průmyslu a obchodu činil v roce 1991 obrat japonského trhu s výrobky řízenými fuzzy logikou (70 % z toho byla spotřební elektronika) cca 2 miliardy amerických dolarů, což odpovídá neuvěřitelnému 1 % tehdejšího celosvětového trhu s počítačovými technologiemi.

„Fuzzy boom“ je sice již minulostí, nicméně fuzzy logika je dnes rutinně

[6] Kuhn, T. S. *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago: Univ. of Chicago Press, 1962.

používána v mnoha oblastech. I když o tom možná nevíme, setkáváme se s ní denně i na českém trhu – je například v pračkách nebo v automatických převodovkách koncernu Volkswagen. Japonská firma Omron, jejíž měřiče tlaku jsou běžně k dostání i u nás, v roce 2013 oznámila, že prodala již 120 miliónů měřičů fungujících na bázi fuzzy logiky.

5. Pravidlové fuzzy systémy

Pravidlové fuzzy systémy a fuzzy regulátory, které jsme zmínili v předchozí kapitole, vycházejí z faktu, že v mnoha případech je člověk – expert – schopen řídit i systém, který je značně složitý a metodami klasické teorie řízení nezvládnutelný. Modely klasické teorie řízení potřebují znát fyzikální model řízeného systému. Expert naproti tomu řídí systém pomocí algoritmu, který je schopen popsat v přirozeném jazyce a který fyzikální model znát nepotřebuje. Expert například ví, že jestliže je teplota v místnosti velmi vysoká a otáčky větráku nízké, pak je třeba otáčky výrazně zvýšit. Zeptáme-li se ho tedy, jak systém řídí – v tomto jednoduchém příkladě tedy řídí větrání místnosti –, řekne nám že používá několik pravidel tvaru „jestliže–pak“. Tato pravidla, jako to právě uvedené, téměř vždy obsahují vágní výrazy („velmi vysoká teplota“ apod.) a expert je na základě nich schopen logicky odvodit správný závěr, akční zásah, například správně nastavit rychlost větráku. To je pro fuzzy logiku příhodná situace. Fuzzy logika umí vágní výrazy matematicky reprezentovat, pracovat s nimi a nakonec provádět logické úsudky, které simulují expertovo uvažování. Výsledný systém, tzv. pravidlový fuzzy systém nebo fuzzy regulátor, tedy v tomto smyslu napodobuje operátorovo rozhodování, aniž by bylo nutné znát fyzikální model řízeného systému.

Pravidlový fuzzy systém sestává z následujících komponent:

- báze pravidel,
- inferenční modul,
- případně modul tzv. defuzzifikace.

Báze pravidel je množina m pravidel následujícího tvaru ($j = 1, \ldots, m$):

$$\text{JESLTIŽE } x_1 \text{ je } \mathcal{A}_{j1} \text{ a } \cdots \text{ a } x_n \text{ je } \mathcal{A}_{jn}, \text{ PAK } y \text{ je } \mathcal{B}_j,$$

kde $x_1, \ldots, x_n, y$ jsou proměnné s možnými hodnotami v množinách $X_1, \ldots, X_n, Y$ a kde $\mathcal{A}_{j1}, \ldots, \mathcal{A}_{jn}, \mathcal{B}_j$ jsou jazykové výrazy jako „malá“, „velmi vysoká“ apod. Inferenční modul představuje algoritmus, který umožní na základě hodnot vstupních proměnných x_i odvodit hodnotu výstupní proměnné y. Hodnotou y může být i fuzzy množina v Y, ze které se v případě potřeby metodou defuzzifikace vypočítá konkrétní hodnota v Y.

Celý postup si podrobně ukážeme na jednoduchém příkladu. Budeme uvažovat jeden vstup, tj. $n = 1$. Množinu X_1 vstupních hodnot budeme značit jen X a budeme předpokládat, že $X = Y = \{0, 1, \ldots, 10\}$. Dále budeme předpokládat, že báze $\mathcal{R}$ pravidel obsahuje následující tři pravidla:

JESTLIŽE x je přibližně 2, PAK y je zhruba 3,
JESTLIŽE x je zhruba 4, PAK y je přibližně 7,
JESTLIŽE x je přibližně 7, PAK y je přibližně 9,

která budeme dále označovat takto:

JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_1$, PAK y je $\mathcal{B}_1$,
JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_2$, PAK y je $\mathcal{B}_2$,
JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_3$, PAK y je $\mathcal{B}_3$.

Tedy $\mathcal{A}_1$ je výraz „přibližně 2“ atd. Jaká výstupní hodnota odpovídá podle této báze pravidel vstupní hodnotě $x = 5$?

Ukážeme si, jak tuto otázku řeší tzv. Mamdaniho přístup, který je v praxi nejčastěji používaným. Jazykovým výrazům $\mathcal{A}_j$ a $\mathcal{B}_j$ nejdříve přiřadíme fuzzy množiny A_j a B_j, které přirozeně odpovídají jejich významu. Zvolíme následující:

x/y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_1(x)$	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
$B_1(y)$	0	0,5	0,75	1	1	0,75	0,5	0	0	0	0
$A_2(x)$	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
$B_2(y)$	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
$A_3(x)$	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
$B_3(y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5

Tedy $A_1(0) = 0$, $A_1(1) = 0{,}5$, $\ldots$, $B_3(10) = 0{,}5$.

Dále určíme fuzzy relace R_1, R_2 a R_3, které naše tři pravidla reprezentují. Fuzzy relace R_j přiřazuje každé dvojici $x \in X$ a $y \in Y$ stupeň $R_j(x, y)$, ve kterém jsou x a y ve vztahu, který R_j reprezentuje. Poznamenejme, že do klasické binární relace daná dvojice buď patří, nebo nepatří. Například dvojice prvků 1 a 3 patří do relace $<$ (být menší). Do fuzzy relace daná dvojice patří v určitém stupni. Například dvojice bratrů, kteří jsou si značně podobní, může do relace „být podobný“ patřit ve stupni 0,8. Stupeň $R_j(x,y)$ je definován předpisem $R_j(x,y) = A_j(x) \wedge B_j(y)$, tedy např.

$$R_1(1,2) = A_1(1) \wedge B_1(2) = 0{,}5 \wedge 0{,}75 = \min(0{,}5, 0{,}75).$$

Naše R_1, R_2 a R_3 jsou popsány následujícími tabulkami (stupeň $R_j(x,y)$ je v průsečíku sloupce x a řádku y):

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
7	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
6	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Výsledná fuzzy relace R, která reprezentuje celou bázi pravidel, je sjednocením fuzzy relací R_1, R_2 a R_3, tedy $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, což znamená, že

$$R(x,y) = \max(R_1(x,y), R_2(x,y), R_3(x,y)).$$

Fuzzy relace R je tedy popsána následující tabulkou:

10	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
8	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0
7	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
6	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
5	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Předpokládejme, že je dána fuzzy množina A', která popisuje skutečnou hodnotu vstupu (A' může třeba reprezentovat výraz „asi 5“ nebo „velmi malá“ nebo „přesně 5“). Podle inferenčního mechanismu, který se nazývá kompoziční pravidlo inference (angl. compositional rule of inference), se ze vstupní fuzzy množiny A' a báze pravidel reprezentované fuzzy relací R odvodí výstupní fuzzy množina $B' = A' \circ R$. Ta je definovaná tak, že pro každou $y \in Y$ je

$$B'(y) = \max_{x \in X}(A'(x) \wedge R(x,y)),$$

přičemž budeme opět uvažovat, že $A'(x) \wedge R(x,y) = \min(A'(x), R(x,y))$. Vstupní fuzzy množina A' se tedy zobrazí na výstupní fuzzy množinu B'.

Tento přístup umožňuje řešit i situace, při kterých je vstupní hodnota konkrétní prvek x' z množiny X (tedy nikoli fuzzy množina A' prvků z X) a jako výstup je požadována konkrétní hodnota y' z Y (tedy nikoli fuzzy množina B' prvků z Y). Je-li $x' \in X$ ona vstupní hodnota, můžeme ji převést na jednoprvkovou fuzzy množinu $\{{}^{1}/x'\}$, tj. vzít $A' = \{{}^{1}/x'\}$, a postupovat při inferenci jako výše. Převod x' na $\{{}^{1}/x'\}$ je speciálním případem *fuzzifikace.* Je-li naopak B' odvozená výstupní fuzzy množina v Y, potřebujeme často pouze jednu konkrétní hodnotu y' z Y. Potřebujeme třeba konkrétní hodnotu akčního zásahu, například hodnotu, na kterou se nastaví rychlost větráku. Hodnotu y' získáme z fuzzy množiny B' metodou *defuzzifikace.* Hodnota y' má vhodně reprezentovat fuzzy množinu B'. Často používanou metodou defuzzifikace je tzv. metoda těžiště. V našem případě by se takto získaná hodnota $y' = D(B')$ vypočítala podle vzorce

$$y' = D(B') = \frac{\sum_{y \in Y} y \cdot B'(y)}{\sum_{y \in Y} B'(y)}.$$

Vraťme se k našemu zadání. Máme zjistit, jaký výstup odpovídá vstupní hodnotě $x' = 5$. Hodnotu $x' = 5$ nejdřív převedeme na fuzzy množinu $A' = \{{}^{1}/5\}$. Pak dle výše uvedeného postupu odvodíme B'. Například pro $y = 6$ dostaneme

$$\begin{aligned} B'(6) &= \max_{x \in X} \min(A'(x), R(x,6)) \\ &= \max_{x \in X} \min(\{{}^{1}/5\}(x), R(x,6)) \\ &= \min(\{{}^{1}/5\}(5), R(5,6)) = \min(1, 0{,}5) = 0{,}5. \end{aligned}$$

Tak postupně odvodíme, že výstupem je fuzzy množina

$$B' = A' \circ R = \{{}^{0,5}/6, {}^{0,75}/7, {}^{0,5}/8\}.$$

Pokud bychom potřebovali konkrétní hodnotu y', spočítali bychom ji výše uvedenou metodou těžiště, tj.

$$y' = D(B') = \frac{6 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}75 + 8 \cdot 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}75 + 0{,}5} = \frac{12{,}25}{1{,}75} = 7.$$

Následující tabulka ukazuje pro všechny vstupní hodnoty x' jim odpovídající výstupní fuzzy množiny B' ($\emptyset$ označuje prázdnou fuzzy množinu, tj. $\emptyset(y) = 0$):

vstup x'	výstupní fuzzy množina $B' = \{{}^1/x'\} \circ R$
10	$\emptyset$
9	$\emptyset$
8	$\{{}^{0,5}/8, {}^{0,5}/9, {}^{0,5}/10\}$
7	$\{{}^{0,5}/8, {}^{1}/9, {}^{0,5}/10\}$
6	$\{{}^{0,25}/6, {}^{0,25}/7, {}^{0,5}/8, {}^{0,5}/9, {}^{0,5}/10\}$
5	$\{{}^{0,5}/6, {}^{0,75}/7, {}^{0,5}/8\}$
4	$\{{}^{0,5}/6, {}^{1}/7, {}^{0,5}/8\}$
3	$\{{}^{0,5}/1, {}^{0,5}/2, {}^{0,5}/3, {}^{0,5}/4, {}^{0,5}/5, {}^{0,5}/6, {}^{0,75}/7, {}^{0,5}/8\}$
2	$\{{}^{0,5}/1, {}^{0,75}/2, {}^{1}/3, {}^{1}/4, {}^{0,75}/5, {}^{0,5}/6, {}^{0,25}/7, {}^{0,25}/8\}$
1	$\{{}^{0,5}/1, {}^{0,5}/2, {}^{0,5}/3, {}^{0,5}/4, {}^{0,5}/5, {}^{0,5}/6\}$
0	$\emptyset$

Pokud navíc provedeme na takto získané fuzzy množiny B' defuzzifikaci metodou těžiště, dostaneme vstupně-výstupní závislost popsanou následující tabulkou. V ní „ND“ odpovídá případům, ve kterých je výstupní fuzzy množina B' prázdná a ve kterých tedy výstupní hodnotu y' považujeme za nedefinovanou.[7)]

x'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B'	ND	3,5	3,9	4,65	7	7	8,375	9	9	ND	ND

[7)] Všimněme si, že defuzzifikací vzniknou i hodnoty, které neleží v množině výstupních hodnot $\{0, 1, \ldots, 10\}$, např. hodnota 3,9, která odpovídá vstupní hodnotě 2. To v dané situaci nemusí vadit. Pokud by to vadilo, hodnoty lze zaokrouhlit. Vstupu 2 by pak odpovídal výstup 4.

6. Historie a perspektivy fuzzy logiky

I když za vznik fuzzy logiky je považován rok 1965, ve které byla publikována Zadehova práce „Fuzzy sets“, základní myšlenka, ze které fuzzy logika vychází, se objevila mnohem dříve. Na skutečnost, že princip bivalence není samozřejmý a že některým výrokům – například těm o budoucnosti – je přirozené přiznat i jinou pravdivostní hodnotu než *pravda* a *nepravda*, upozornil jako první ve svých klasických spisech *De interpretatione* a *Categoriae* sám zakladatel klasické logiky, Aristotelés. Až do přelomu 19. a 20. století se však úvahy o logice s více pravdivostními hodnotami objevovaly jen zřídka. Důležitou výjimkou byl významný středověký myslitel William Ockham, který analyzoval Aristotelovy práce a odvodil z nich mimo jiné jistou spojku implikace se třemi pravdivostními hodnotami. Aristotelovy úvahy o možné třetí pravdivostní hodnotě se staly předmětem vášnivých, deset let trvajících debat na univerzitě v Lovani, které se odehrávaly v letech 1465–1475. Za další mezník lze považovat úvahy o vágnosti výrazů přirozeného jazyka. Za vágní jsou označovány právě ty výrazy, které nemají ostře vymezené hranice, jako např. výše uvedený výraz „normální krevní tlak“. Tyto úvahy se poprvé objevily u významného empiristy Johna Lockea, například v jeho základním filozofickém díle *Esej o lidském chápání*. Úvahy o vágních výrazech se poté staly součástí knih o logice – první je významná učebnice *Logick* Isaaca Wattse z roku 1724 – nicméně součástí, které byla zpravidla věnována jen okrajová pozornost.

Na přelomu 19. a 20. století se vícehodnotovými logikami zabývali tři myslitelé: skotský matematik Hugh MacColl, americký filozof a matematik Charles Sanders Peirce, a ruský filozof Nikolaj Vasiljev. Vznik moderní vícehodnotové logiky je však spjat s obdobím kolem roku 1920, kdy své objevy učinili tři význační vědci: polský logik Jan Łukasiewicz, švýcarský matematik Paul Bernays a americký matematik polského původu Emil Post. Łukasiewicz byl motivován Aristotelovými úvahami o pravdivosti výroků o budoucnosti a navrhl logické systémy se třemi i více pravdivostními hodnotami. Ty jsou známy jako Łukasiewiczovy logiky a patří dnes mezi nejdůležitější systémy fuzzy logiky. Bernays, jehož přínos na poli vícehodnotové logiky byl donedávna neznámý, i Post byli motivováni především matematickými úvahami a problémy.

Zejména Łukasiewiczova práce vedla ke značnému rozvoji logik s více pravdivostními hodnotami, a to jak samotné Łukasiewiczovy logiky, tak logik jiných. Ty se liší používanými pravdivostními hodnotami, ale také tím, jak definují logické spojky. Některé práce přitom vycházely z praktických motivací, jiné se o motivace a případné aplikace nezajímaly a studovaly vícehodnotové logiky jako formální systémy bez ohledu na jejich využití. K těm prvním patří práce Łukasiewicze, který interpretoval třetí pravdivostní hodnotu, $1/2$, jako hodnotu výroku, který je možný (tj. nikoli nutně pravdivý nebo nepravdivý), dále pak práce sovětského logika Dmitrije A. Bochvara, který rozvinul logiku pro analýzu paradoxů, nebo amerického logika Stephena C. Kleeneho, který byl motivován některými otázkami teorie výpočtů. Těch druhých, tj. prací formalistických, které nehleděly na praktické motivace, byla však naprostá většina a jejich podíl rostl. To vedlo k tomu, že se začaly objevovat kritické hlasy – mají vícehodnotové logiky hlubší smysl nebo jsou to jen matematicko-logické hračky?

Na poli filozofie se mezitím, ovšem většinou bez kontaktu s výzkumem ve vícehodnotové logice, začala intenzívně rozvíjet debata o vágnosti. Jedním ze zásadních impulsů byl článek „Vagueness“ prominentního matematika a filozofa Bertranda Russella z roku 1923. Brzy se objevily další, mezi nimi také vlivný článek „Vagueness: an exercise in logical analysis“ amerického filozofa Maxe Blacka z roku 1937, ve kterém byl – téměř 30 let před prvním Zadehovým článkem o fuzzy množinách, byť v mírně jiné podobě a pod názvem „consistency profile“ – pojem fuzzy množiny v podstatě zaveden. Prací o vágnosti poměrně rychle přibývalo, nepřesáhly však pole filozofie a až na několik výjimek, mezi které patří zmíněná Blackova práce, se otázkou, jak vágnost matematicky uchopit, natož pak, jak případné matematické modely vágních výrazů použít, nezabývaly.

Zadehův článek „Fuzzy sets“ zveřejněný v roce 1965 představuje na poli vícehodnotové logiky zásadní milník. Zadeh sice v článku nevytvořil žádnou konkrétní logiku v moderním slova smyslu – ostatně termín „fuzzy logic“ poprvé použil v poněkud technickém smyslu v roce 1966 Marinos a v dnes běžném smyslu až v roce 1968 Goguen. Existujících prací na poli vícehodnotové logiky, ani na poli vágnosti si Zadeh nebyl vědom (na žádnou z nich se v článku neodvolává). Hnacím motorem pro něho byl zmíněný nedostatek klasického pojmu množina – neschopnost reprezentovat význam vágních výrazů, které jsou typické pro přirozený jazyk a zásadní pro naši schopnost popisovat okolní svět, formulovat a sdělovat znalosti, třídit informace a podobně. Pojmem fuzzy množina ukázal, jak tento zásadní nedostatek odstranit. Z hlediska vícehodnotové logiky však také ukázal přirozený způsob, jak interpretovat mezilehlé pravdivostní hodnoty, např. 0,8, totiž jako pravdivostní hodnoty výroků, které obsahují vágní výrazy, tedy výroků jako „Venkovní teplota je *velmi nízká*“, „Tento pacient má *vysoký* krevní tlak“, „Bude-li inflace *vysoká*, úspory se *značně sníží*“ a podobně. Byť nám dnes připadá, že tato interpretace se přímo nabízí a nelze ji přehlédnout, v literatuře o vícehodnotové logice byla před Zadehovým článkem neznámá. Zadehův objev má atributy významného objevu: řeší problém, který dostupnými metodami řešitelný nebyl; jde o problém základní, tj. problém, který se promítá do celé řady oblastí (matematika, informatika, inženýrské obory, přírodní i společenské vědy); řeší ho koncepčně novým, ale jednoduchým pojmem, který je v článku popsán spolu se základními pravidly, jak s ním pracovat.

Jak jsme uvedli výše, fuzzy logika jako alternativa zobecňující logiku klasickou představuje zásadně nové paradigma a musela se zpočátku potýkat s negativními reakcemi. Od 70. let 20. století se však výzkum ve fuzzy logice začal intenzívně rozvíjet. Teoretický výzkum se přitom zabýval zejména teorií fuzzy množin a rozvojem různých oblastí matematiky, například topologie, pravděpodobnosti nebo algebry, z pohledu fuzzy množin. Aplikačně zaměřený výzkum se věnoval zejména použití fuzzy množin v různých oblastech, ve kterých hraje důležitou roli přirozený jazyk – například v rozhodování, řízení, rozpoznávání vzorů nebo klasifikaci a shlukování – a vyvinuté metody byly používány pro řešení různých problémů. Významným podnětem pro rozvoj aplikačně zaměřeného výzkumu se staly první komerčně úspěšné aplikace fuzzy logiky, o kterých jsme se zmínili výše.

Na vývoji fuzzy logiky se významnou měrou podíleli také čeští vědci. Významné výsledky získal nejdříve Jan Pavelka. Na jeho práci pak navázal Vilém Novák, který je také autorem první české knihy o fuzzy logice [2]. V 90. letech 20. století se fuzzy logikou začal intenzívně zabývat Petr Hájek, matematik a logik světového formátu, který se svými spolupracovníky fuzzy logiku významným způsobem rozvinul. V současné době patří výzkumné skupiny v Praze, Ostravě a Olomouci mezi lídry v oboru.

Fuzzy logika je po padesáti letech své existence stále živým oborem. Některé její oblasti mají již kanonickou podobu a jsou dnes standardní náplní učebnic. Jiné, a mezi nimi je mnoho z těch, které přímo či velmi úzce souvisí s informatikou, jsou stále otevřené a volají po řešení důležitých problémů. Dobře to ilustruje skutečnost, že prestižní Gödelova cena byla v roce 2014 udělena Ronaldu Faginovi, Amnonu Lotemovi a Monimu Naorovi právě za práci o optimální agregaci pravdivostních stupňů v jistém obecném databázovém problému.

Lotfi Zadeh popsal v roce 2015 v článku „Fuzzy logic—a personal perspective“ svou představu o budoucnosti fuzzy logiky takto: „Věda je v rozhodujících aspektech založena na klasické, aristotelovské, dvouhodnotové logice. Ve vědě je binarizace pravidlem spíše než výjimkou. V lidském myšlení je tomu naopak. Jedním z hlavních přínosů fuzzy logiky je to, že poskytla základ pro dalekosáhlou změnu – v téměř všech oblastech vědy – od binarismu k pluralismu, od černého a bílého k odstínům šedi. Tento posun se bude v následujících letech nejspíš zrychlovat a vliv fuzzy logiky se nejspíš stane ještě viditelnějším a významnějším. Je pravděpodobné, že ve vědě – stejně jako ve fuzzy logice – vše bude nebo bude moci být otázkou míry. To je to, co vidím ve své křišťálové kouli.“

Podrobné pojednání o historii fuzzy logiky, jejím vývoji a perspektivách přinesla nedávno vydaná kniha [1].

Literatura

[1] *Bělohlávek, R., Dauben, J. W., Klir, G. J.*: Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective. Oxford University Press, New York, 2017.

[2] *Novák, V.*: Fuzzy množiny a jejich aplikace. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1990.