

# MATEMATIKA

## Geometrie pohybu I: Trajektorie bodů

PETRA SURYNKOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Mé vlastní dlouholeté zkušenosti z výuky na Matematicko-fyzikální fakultě UK a všeobecně celková situace studia matematiky a geometrie na VŠ ukazují na vážné mezery studentů v porozumění elementární geometrii a v dokazování platností geometrických tvrzení již na SŠ [6, 10]. Tento nedostatek je třeba řešit už na středoškolské úrovni. Psal o tom ve svém článku také prof. Kuřina, [4], již v roce 1987. Studiu geometrii je potřeba se významně věnovat už na základní a střední škole, a to platí i v dnešní době.

Zaměříme se na specifickou oblast geometrie, na které si ukážeme, jak lze toto studium obohatit o jiný pohled. Cílem příspěvku je na konkrétních příkladech ukázat, že k definici křivek, můžeme přistupovat z pohledu kinematické geometrie. Při vyšetřování různých typů křivek můžeme s úspěchem realizovat experimenty s jednoduchými pomůckami a využívat moderního široce rozšířeného softwaru GeoGebra. Z těchto experimentů můžeme vycházet při dokazování platnosti zkoumaných geometrických jevů. Na základě experimentů lze vytvářet hypotézy, které následně ověřujeme již klasickými matematickými prostředky, tj. geometrická tvrzení dokazujeme synteticky nebo s užitím analytické geometrie.

Na střední škole se pravděpodobně s pojmem kinematické geometrie explicitně nesetkáme, ale intuitivně je nám tento pojem jistě zřejmý. Bude nás zajímat pohyb. Křivku tedy budeme chápat jako *dráhu* (*trajektorii*) nějakého plynule se pohybujícího bodu, což je přístup k vytvoření křivky

velmi názorný a přirozený. Zanedbáme přitom některé fyzikální aspekty. Nebude nás zajímat rychlost a zrychlení pohybujících se rovinných útvarů. Středoškolští studenti takové zavedení křivky budou chápat určitě lépe než abstraktní pojetí, že křivka je spojitým obrazem nějakého intervalu reálných čísel. Řekneme-li, že je křivka dráhou nějakého pohybujícího se bodu a že se pohyb uskutečnil v konečném časovém úseku  $\langle a, b \rangle$ , můžeme o křivce začít velmi intuitivně hovořit jako o spojitém zobrazení, které každému okamžiku  $t \in \langle a, b \rangle$  přiřadí bod v rovině či v prostoru. Kdybychom hledali korektní a přesto velmi intuitivní a matematicky správné definování křivek, můžeme nahlédnout do celé řady skript. Jmenujme například [1] a [2]. Zde jsou popisovány křivky s využitím už pokročilého aparátu. Pokud hledáme zdroj, který se věnuje středoškolskému pojetí definování křivek, doporučuji k nahlédnutí například [3], kde jsou zpracovány kuželosečky. Z dalších knižních zdrojů jmenujme klasické učebnice a sbírky úloh jako např. [7, 8]

Při studiu křivek se zcela nevyhneme užití formálního matematického popisu, ale doplníme jej právě o kinematickou interpretaci. Matematický aparát budeme potřebovat k tomu, abychom ukázali, které křivky jsme kinematickým určením získali. K tomu, abychom křivky zaváděli kinematicky, nám výborně poslouží software GeoGebra, jehož užívání se v posledních letech na základních a středních školách těší velké oblibě jak mezi učiteli tak mezi žáky a studenty.

Ze střední školy známe hned celou řadu křivek. Na úplném začátku studia geometrie jsme se setkali s přímkou. Pojem je to velmi abstraktní a vystačil by nám na celý článek, protože odpověď na otázku *Co je to přímka?* není snadná. Setkali jsme se rovněž s kuželosečkami – s elipsou (ano, sem patří i kružnice), s hyperbolou, s parabolou. Tyto křivky jsme definovali nejčastěji jako řezy válcovou a kuželovou plochou, tedy dalším možným způsobem, jak je možné na křivky nahlížet. Možná jsme se setkali, například v matematickém semináři nebo dokonce ve fyzice, i s jinými křivkami. Studovali jsme například trajektorie vodorovného a šikmého vrhu. Na vysoké škole jsme studium prohloubili o další typy křivek a zaváděli jsme je různými způsoby. Zůstaňme ale na škole střední.

Geometrické pojmy jako bod, přímka a obecně křivka vznikaly v matematice abstrakcí nějakých reálných objektů. V celém vývoji matematiky docházelo k postupnému zpřesňování pojmu křivka. Naším záměrem není vyčerpávat možné definice křivek, ale přistoupit k problematice z praktického hlediska. Zvolme proto opačný přístup a abstraktním křivkám připojme

jejich geometrické obrazy a modely z praxe. Zkusme poukázat na to, že modely křivek se používají v mnoha odvětvích a setkáváme se s nimi v každodenním životě.

Připomeneme si známé i méně známé konstrukce některých speciálních křivek a ukážeme si příklady využití křivek, respektive jejich modelů, v praxi. Zůstaneme přitom ve sférách středoškolské geometrie.

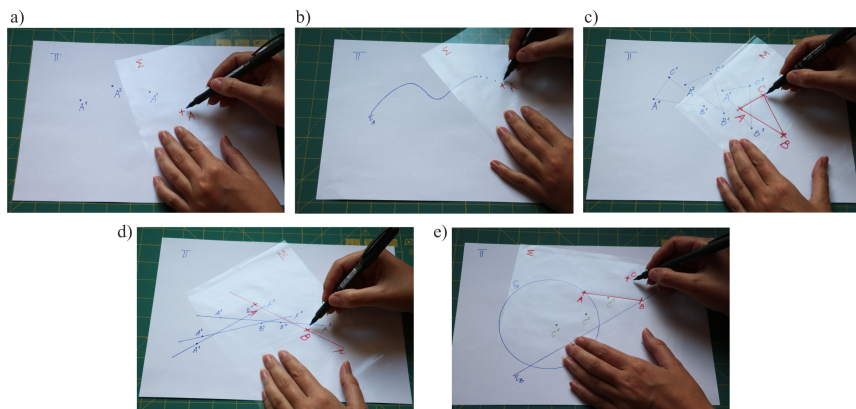
## Lehký úvod do kinematické geometrie v rovině

Chceme-li hovořit o kinematické geometrii v rovině, musíme si vysvětlit několik základních pojmů. Jak jsme již uvedli, *dráha* nebo také *trajektorie* bodu je křivka, kterou bod při pohybu opisuje. Vylučujeme případ, kdy by trajektorií bodu byl bod. Přidejme ještě další možné kinematické vytvoření křivky, neboť se nemusíme omezovat pouze na pohybující se body. Obálka křivky, je křivka (může mít více větví nebo se dokonce redukovat na bod), kterou vytváří pohybující se křivka. Existuje-li křivka, která se dotýká všech poloh pohybující se křivky a každý její bod je dotykovým bodem pohybující se křivky, nazýváme tuto křivku obálkou. Platí tedy, že v každé poloze se pohybující křivka dotýká své obálky, tj. křivka v dané poloze a její obálka mají v bodě dotyku společnou tečnu. Trajektorii bodu  $A$  budeme značit  $\tau_A$ , obálku křivky  $a$  budeme značit  $(a)$ .

Přijmeme následující úmluvu. Rovinu, ve které leží trajektorie bodů a obálky křivek, označme  $\Pi$ . Tato rovina se nepohybuje, zůstává na místě, tedy i vše, co v ní leží, je neměnné. Pohybující se body, či křivky, leží v rovině, kterou označíme  $\Sigma$ . Rovina  $\Sigma$  se jako celek pohybuje po rovině  $\Pi$ , přičemž jsme stále v dvourozměrném prostoru. Body a křivky roviny  $\Sigma$  opisují v rovině  $\Pi$  trajektorie a obálky.

Pohyb roviny  $\Sigma$  po rovině  $\Pi$  lze velmi jednoduše simulovat v praxi. Bod, který se pohybuje, si nakreslíme na průsvitnou fólii, tedy rovinu  $\Sigma$ . Můžeme do fólie vytvořit díрку, přes kterou budeme moci zakreslovat polohu bodu v rovině  $\Pi$ . S fólií hýbeme („kloužeme“) po rovině  $\Pi$ , to může být tabule, list papíru, či školní sešit. V několika polohách zakreslíme v rovině  $\Pi$  bod skrz díрку ve fólii, tedy body trajektorie, viz v obr. 1a) polohy  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  bodu  $A$ . Když se nám podaří vykreslovat polohy bodů spojitě, dostaneme empirický model trajektorie, viz obr. 1b). Můžeme také zakreslovat najednou více trajektorií, tedy na fólii zvolíme více bodů. Všimněme si velmi důležitého faktu. Jakmile vyznačíme body na fólii, tyto body už vůči sobě nemění polohu, tj. vzdálenosti mezi nimi jsou neměnné, podívejme se na obr. 1c). Říkáme, že objekty v rovině  $\Sigma$  tvoří tzv. *neproměnnou*

rovinnou soustavu, která se jako celek pohybuje po *neproměnné rovinné soustavě*  $\Pi$ , viz například [11]. Uvědomme si také, že fólii nikdy neotočíme, neustále se pohybuje pouze ve dvoudimenzionálním prostoru. Všechny polohy objektů jsou tedy přímo shodné, jak je patrné rovněž z obr. 1c). Fólii lze využít i k simulaci pohybu křivek. Tj. na fólii si zakreslíme křivku nebo křivky, jejichž obálky nás zajímají a fólii opět hýbeme po rovině  $\Pi$ . Záleží, jaké jsme zvolili typy křivek, bude nyní složitější přes fólii zakreslovat jejich polohy, ale řekněme, že máme pro jednoduchost přímky. Stačí tedy v každé poloze zakreslit přes fólii umístění dvou bodů těchto přímek a dostaneme tak jednoznačně určenou jejich polohu, viz obr. 1d). Podaří-li se nám potom v rovině  $\Pi$  zakreslit křivku, která se všech takto získaných poloh přímek dotýká, dostaneme hledanou obálku. Pro složitější křivky využijeme možnosti programu GeoGebra.



Obr. 1 Pohyb roviny  $\Sigma$  po rovině  $\Pi$  realizovaný pomocí průsvitné fólie

Samozřejmě nás nyní napadne, jak budeme definovat pohyb s fólií. Nezadáme-li žádné omezující podmínky, nemůžeme určit, jaké typy trajektorii a obálek ve výsledku dostaneme. Řekněme, že pohyb je dán jednoznačně, jestliže je jednoznačně dána každá poloha pohybuující se roviny  $\Sigma$ , tj. fólie. Stačí se trochu zamyslet a hned nám bude jasné, co nám tato věta říká. Protože jsou jednotlivé polohy pohybuujících se objektů přímo shodné, stačí nám znát přemístěné polohy dvou různých bodů, tj. nějaké úsečky roviny  $\Sigma$ . Jelikož musíme k jednoznačnému určení pohybu znát každou polohu takové pohybuující se úsečky, znamená to, že je nutné znát každou

polohu krajních bodů této úsečky, tj. trajektorie těchto krajních bodů. Pro určenost pohybu tedy platí následující:

*Pohyb roviny  $\Sigma$  je jednoznačně určený, známe-li trajektorie dvou různých bodů roviny  $\Sigma$ .*

Na obr. 1e) můžeme vidět trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  dvou různých bodů  $A$  a  $B$ . Trajektorie  $\tau_A$  je kružnice, trajektorie  $\tau_B$  je přímka. Na fólii jsme určili dva různé body  $A$  a  $B$ , tedy je jednoznačně dána jejich vzdálenost. Nyní už je pohyb jednoznačně určený, tj. bod  $A$  se pohybuje po své trajektorii  $\tau_A$  a bod  $B$  po své trajektorii  $\tau_B$ . Můžeme určit trajektorii nějakého dalšího bodu  $C$ , na obr. 1e) jsou zakresleny tři polohy  $C^1, C^2, C^3$  bodu  $C$ . V kinematické geometrii obvykle navíc zadáváme výchozí polohu pohybující se roviny  $\Sigma$ . Může se totiž stát, že některé části zadaných trajektorií jsou nedostupné a body se ve skutečnosti pohybují jen po jejich částech, viz například [11].

Lze odvodit také jiná určení pohybu, ale vždy je možné převést tato určení na zadání pomocí dvou trajektorií. Zatím se tedy věnujme pouze tomuto a podívejme se na některé konkrétní příklady. V našich úvahách přitom vyloučíme pohyby, jejichž všechny trajektorie jsou buď soustředné kružnice, nebo navzájem rovnoběžné přímky. V prvním případě se jedná o rotaci ve druhém případě o posunutí.

## Příklady kinematicky vytvořených křivek

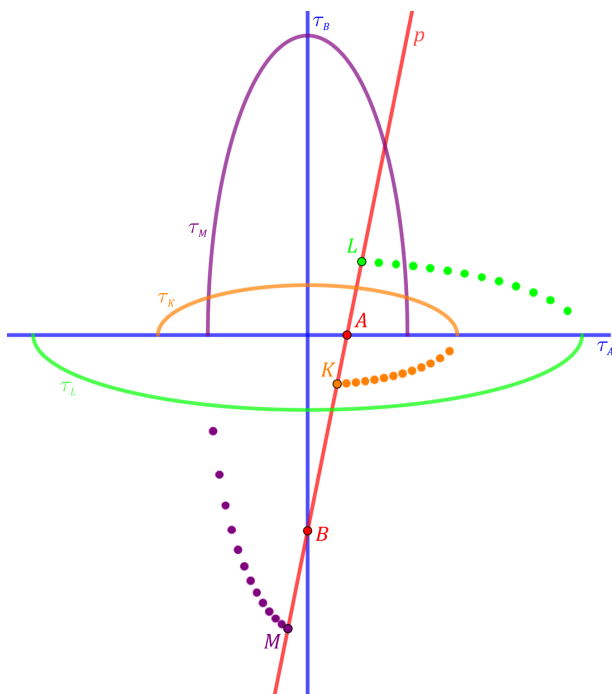
### Úloha

Mějme dány dvě různoběžné přímky  $\tau_A$  a  $\tau_B$ . Sestrojte trajektorie různých bodů  $K, L, M$  přímky  $p = AB$ , jestliže se bod  $A$  pohybuje po přímce  $\tau_A$  a bod  $B$  po přímce  $\tau_B$ . Bod  $K$  je vnitřním bodem úsečky  $AB$ , bod  $L$  leží na polopřímce  $BA$  za bodem  $A$  a bod  $M$  leží na polopřímce  $AB$  za bodem  $B$ .

*Řešení.* a) Začněme jednodušším případem, kdy jsou trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  navzájem kolmé přímky, sledujme obr. 2. Situaci jsme zakreslili v programu GeoGebra a vykreslili jsme část trajektorií a dále několik izolovaných poloh pohybujících se bodů. To samé můžeme zrealizovat opět pomocí papíru a průsvitné fólie, tj. na papír zakreslíme kolmé trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$ , na fólii jednotlivé body  $A, B, K, L, M$ . Je zřejmé, že vzdálenosti bodů jsou konstantní.

Abychom mohli v GeoGebře pohyb definovat, museli jsme zakreslit dané trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  a výchozí polohu objektů. V našem případě jsme

nejdříve definovali bod  $A$  tak, že se může pohybovat pouze po trajektorii  $\tau_A$  (v GeoGebře tzv. částečně vázaný objekt). Dále jsme si zvolili délky úsečků  $MB$ ,  $BK$ ,  $KA$  a  $AL$ . Pro danou polohu bodu  $A$  jsme tím pádem dostali polohu přímky  $AB$ , neboť víme, že bod  $B$  se pohybuje po své trajektorii  $\tau_B$ . V tomto případě takto dostaneme pro danou polohu bodu  $A$  dvě polohy bodu  $B$  (bude patrné také z výpočtu), tj. dvě polohy pohybující se soustavy  $\Sigma$ , do obrázku jsme zakreslili polohu jednu. Tento přístup užijeme i pro analytické odvození typů křivek. Nyní můžeme pohybovat bodem  $A$  po trajektorii  $\tau_A$  a sledovat, co se děje s ostatními body. Příklad zpracovaný v GeoGebře lze otevřít ve webovém prohlížeči, viz [9].



Obr. 2 Pohyb zadaný dvěma navzájem kolnými přímými trajektoriemi

Podle obr. 2 a experimentů s fólií či v GeoGebře, které zvládne samostatně i student ve škole či při domácí přípravě, se můžeme domnívat, že výslednými trajektoriemi jsou různé ovály, zřejmě elipsy. Přesvědčme se o tom prostředky analytické geometrie.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic, trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  nechť splývají s osami  $x$ ,  $y$ . Libovolný bod  $X = [x, y]$  přímkou  $p = AB$  opisuje při daném pohybu trajektorii  $\tau_X$ . Vzdálenost bodů  $A = [a, 0]$  a  $B = [0, b]$  označme  $d$  a zvolme ji pevně,  $d > 0$ . Souřadnice bodu  $B$  tedy lze zapsat v závislosti na této délce, tj.  $B = [0, \pm\sqrt{d^2 - a^2}]$ . Libovolný bod  $X$  přímkou  $p$  můžeme vyjádřit  $X = A + (B - A)t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tj. zapsáno v souřadnicích

$$\begin{aligned}x &= a - at \\y &= bt\end{aligned}\tag{1}$$

Označíme-li vzdálenost bodu  $X$  od bodu  $A$  jako  $v$ , platí  $v = |td|$  a  $|t| = v/d$ . Dále víme, že platí

$$a^2 + b^2 = d^2.\tag{2}$$

Vyjádríme-li  $a$  a  $b$  z (1) a dosadíme do (2), po úpravě dostáváme

$$\frac{x^2}{d^2(1-t)^2} + \frac{y^2}{d^2t^2} = 1.\tag{3}$$

Pro  $t > 0$  a  $t \neq 1$ , tj. leží-li bod  $X$  na úsečce  $AB$  (a je různý od bodů  $A$ ,  $B$ ) nebo na polopřímce  $AB$  za bodem  $B$  (příkladem jsou body  $K$  a  $M$ ), dostáváme jako trajektorii bodu  $X$  elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, poloosami o velikostech  $d - v$  a  $v$  nebo  $v - d$  a  $v$  na souřadnicových osách a rovnicí

$$\frac{x^2}{(d-v)^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1.\tag{4}$$

Pro  $t < 0$ , tj. leží-li bod  $X$  na polopřímce  $BA$  za bodem  $A$  (příkladem je bod  $L$ ), dostáváme jako trajektorii bodu  $X$  elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, poloosami o velikostech  $d + v$  a  $v$  na souřadnicových osách a rovnicí

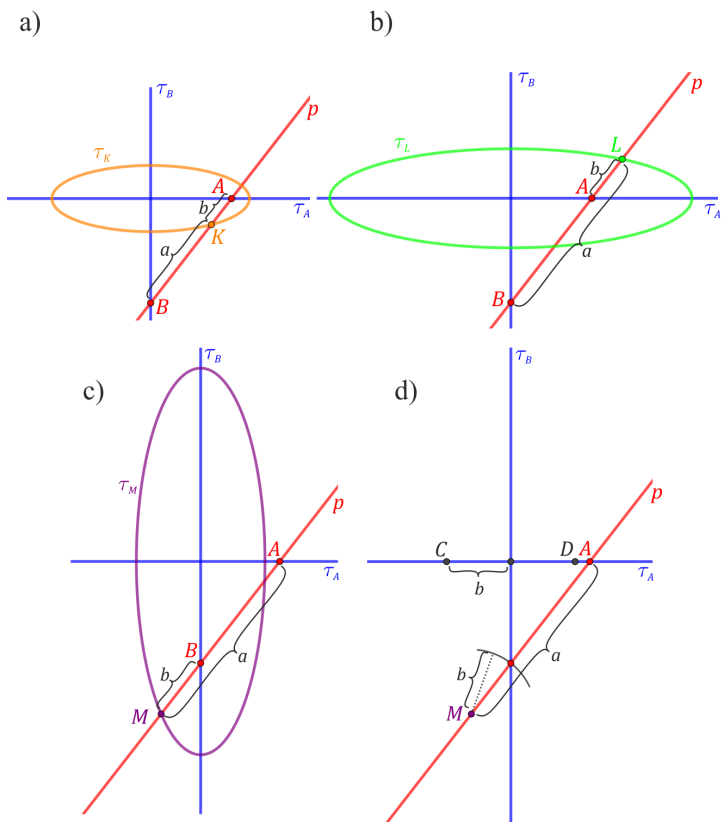
$$\frac{x^2}{(d+v)^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1.\tag{5}$$

Parametrický popis elipsy pro libovolné  $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  můžeme zapsat ve tvaru

$$[d(1-t_0) \cdot \cos u, dt_0 \sin u], \quad u \in (0, 2\pi).\tag{6}$$

Z našich úvah rovněž vyplývají známé konstrukce elipsy tzv. *rozdílová a součtová proužková konstrukce*. Pro danou hlavní nebo vedlejší osu elipsy

(zde míněno jak poloha, tak délka) a libovolnou polohu bodu elipsy, tj. jednu polohu bodů  $K$ ,  $L$ , nebo  $M$ , podle předchozího určíme velikost chybějící osy, viz obr. 3.



Obr. 3 Součtová a rozdílová konstrukce elipsy

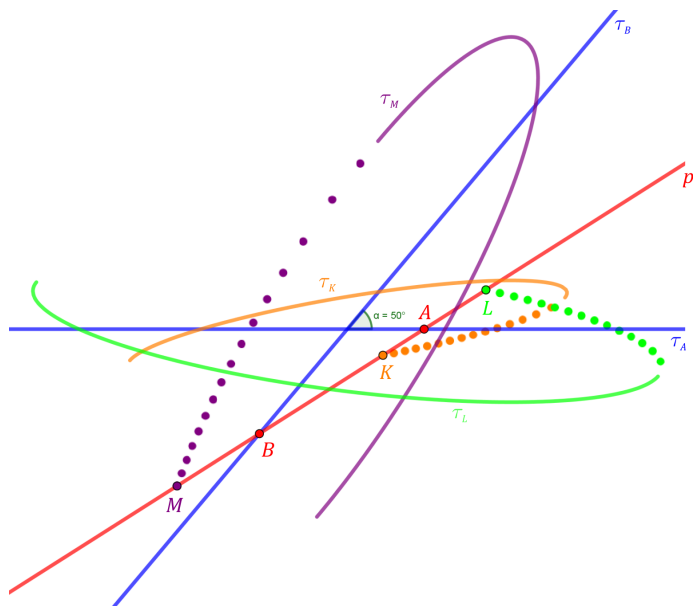
V části a) můžeme vidět platnost součtové proužkové konstrukce a v částech b) a c) platnost rozdílové proužkové konstrukce. V části d) na obr. 3 je potom demonstrováno, jak pro danou vedlejší osu  $CD$  elipsy a bod  $M$  lze rozdílovou proužkovou konstrukcí dohledat velikost hlavní poloosy elipsy. Součtová proužková konstrukce by se dala použít obdobně.

Zamysleme se ještě nad tím, pro jaké hodnoty bude trajektorie bodu  $X$  speciálně kružnicí. Hledáme pro jaké  $t$  ve vyjádření (3), jsou poloosy elipsy



stejně dlouhé. Je zřejmé, že pro  $t = 1/2$  dostáváme kružnici s poloměrem  $v$ , tedy je-li bod  $X$  středem úsečky  $AB$ . Jiný případ rovnosti poloos nenastane.

b) Přejdeme k obecnému případu, kdy trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  svírají jiný než pravý úhel, sledujme obr. 4.



Obr. 4 Pohyb zadaný dvěma různoběžnými přímými trajektoriemi svírajícími obecný úhel

Vymodelování pohybu v GeoGebře či s pomocí fólie zůstává stejné, pouze se změní úhel mezi trajektoriemi. V programu GeoGebra jsme opět vykreslili části trajektorií a několik izolovaných poloh pohybujících se bodů. Příklad zpracovaný v GeoGebře lze také otevřít ve webovém prohlížeči, viz [9]. Opět se můžeme domnívat, že výslednými trajektoriemi jsou podle experimentů elipsy. Nyní se však jedná o komplikovanější problém. Na první pohled je z našich experimentů patrné, že eliptické trajektorie nemají osy v základní poloze, tj. nesplývají se souřadnicovými osami. S kuželosečkami v obecné poloze se na střední škole pravděpodobně nesetkáváme, přesto si řešení rozeberme s využitím pouze středoškolských poznatků analytické geometrie.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic, trajektorie  $\tau_A$  nechť splývá s osou  $x$ , průsečík trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$  je počátek soustavy souřadnic, úhel, který trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  svírají, označme  $\alpha$ . Libovolný bod  $X = [x, y]$  přímky  $p = AB$  opisuje při daném pohybu trajektorii  $\tau_X$ . Vzdálenost bodů  $A = [a, 0]$  a  $B = [b_x, b_y]$  označme  $d$  a zvolme ji pevně. Libovolný bod  $X$  přímky  $p$  můžeme vyjádřit  $X = A + (B - A)t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tj. zapsáno v souřadnicích

$$\begin{aligned}x &= a - (b_x - a)t \\y &= b_y t\end{aligned}\tag{7}$$

Označíme-li vzdálenost bodu  $X$  od bodu  $A$  jako  $v$ , platí  $v = |td|$  a  $|t| = v/d$ . Dále víme, že platí

$$(b_x - a)^2 + b_y^2 = d^2,\tag{8}$$

neboť  $\|AB\| = d$ .

Trajektorie  $\tau_B$  bodu  $B$  svírá s osou  $x$  úhel  $\alpha$ , tedy platí

$$b_y = kb_x,\tag{9}$$

kde  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Vyjádříme-li  $a$ ,  $b_x$  a  $b_y$  z (7) a (9) a dosadíme do (8), po úpravě dostáváme

$$t^2 k^2 x^2 + (1 + k^2(1 - t)^2)y^2 - 2tkxy - d^2 t^2 k^2(1 - t)^2 = 0.\tag{10}$$

Opět bychom mohli rozlišit případ pro  $t > 0$  a  $t \neq 1$ , tj. leží-li bod  $X$  na úsečce  $AB$  (a je různý od bodů  $A$ ,  $B$ ) nebo na polopřímce  $AB$  za bodem  $B$  (příkladem jsou body  $K$  a  $M$ ) a dosadit do předpisu (10)  $t = v/d$ . Nebo dále můžeme uvažovat případ pro  $t < 0$ , tj. leží-li bod  $X$  na polopřímce  $BA$  za bodem  $A$  (příkladem je bod  $L$ ), a dosadit do předpisu (10)  $t = -v/d$ . Rovnice (10) popisuje elipsu v obecné poloze (oproti případu s kolnými trajektoriemi se v rovnici trajektorie  $\tau_X$  objevuje smíšený kvadratický člen  $xy$ ), osy elipsy nejsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Že se skutečně jedná o rovnici elipsy, lze ukázat například tak, že determinant matice kuželosečky, tzv. diskriminant kuželosečky, je nenulový a determinant matice kvadratických členů, tzv. diskriminant kvadratických členů, je větší než nula, viz [5]. Tato problematika je už nad rámec osnov střední školy, ale ukažme si rovnici této elipsy pro konkrétní hodnoty  $t$ ,  $d$ ,  $k$ . Nechť  $t = -1$  (bod  $X$  leží na polopřímce  $BA$  za bodem  $A$  ve vzdálenosti  $d$  od bodu  $A$ ),  $d = 2$  a  $k = \sqrt{3}/3$ , tedy trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  svírají

úhel  $\alpha = \pi/6$ . Po dosazení do rovnice (10) dostáváme předpis

$$x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy - 16 = 0. \tag{11}$$

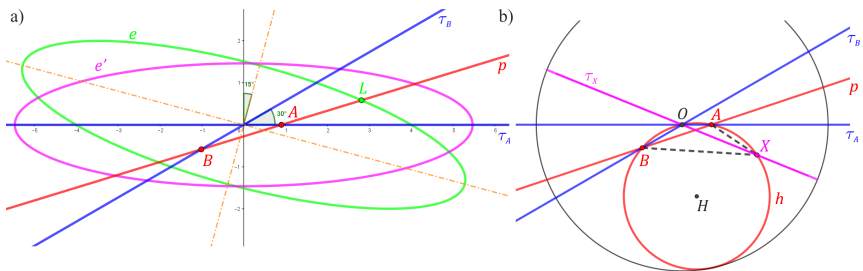
Lze ukázat, že (11) je rovnice elipsy  $e$ , která vznikla otočením elipsy  $e'$  v základní poloze s rovnicí

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{2+\sqrt{3}} = 1 \tag{12}$$

o orientovaný úhel  $\varphi = -\pi/12$ . Pro výpočet jsme použili transformační rovnice

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \tag{13}$$

tj. do rovnice (11) jsme za  $x$  a  $y$  dosadili transformační rovnice (13) a výraz u smíšeného kvadratického členu  $x'y'$  jsme položili roven nule. Tím jsme určili orientovaný úhel otočení  $\varphi$ . Dosazením transformačních rovnic s tímto úhlem do předpisu (11) jsme získali rovnici (12). Příklad zadání pohybu s těmito konkrétními vstupními hodnotami je ilustrován na obr. 5a). Nanaženo je rovněž otočení elipsy  $e'$  v základní poloze o orientovaný úhel  $\varphi$  do polohy  $e$ .



Obr. 5 Elipsa  $e$  jako trajektorie bodu  $L$  při pohybu zadaném dvěma různoběžnými přímnými trajektoriami svírajícími úhel  $30^\circ$  a odpovídající elipsa  $e'$  v základní poloze a trajektorie bodu  $X$  kružnice  $h$

V úloze jsme tímto popsali tzv. *eliptický pohyb* a odvodili jsme trajektorie speciálně zvolených bodů. Vyslovme následující definici.

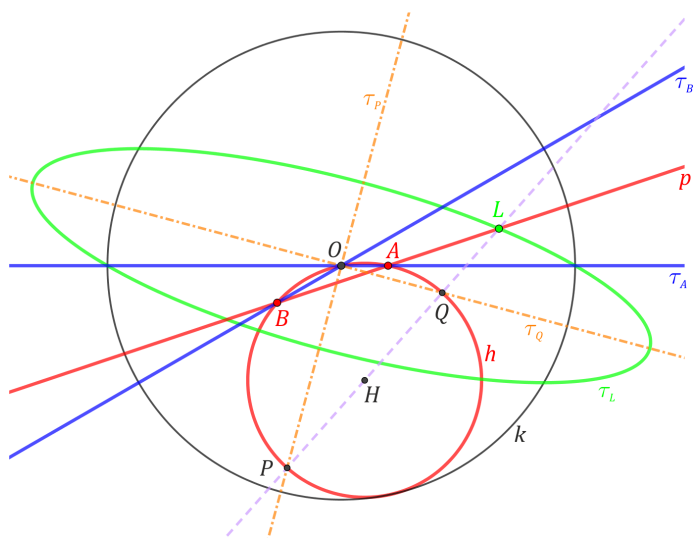
## Definice

Pohyb roviny  $\Sigma$ , jejíž dva různé body opisují přímé různoběžné trajektorie, se nazývá *eliptický pohyb*.

Mohlo by se nyní zdát, že trajektorie všech bodů roviny  $\Sigma$  při eliptickém pohybu jsou elipsy. My jsme spočítali, že tomu tak je pro všechny body přímky  $p = AB$ , které jsou různé od bodů  $A, B$ . Zkusme zvolit jiný bod roviny  $\Sigma$  a podívejme se, jakou bude vykreslovat trajektorii. Sestrojme v libovolné poloze pohybu kružnici  $h$  procházející body  $A, B$  a  $O$ , kde  $O$  je průsečík trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$ . Uvědomme si velmi hezkou vlastnost. Kdybychom totiž sestrojili kružnici  $h$  i v jiných polohách pohybu, tj. stále by byla určena třemi body  $A, B$  a  $O$ , vždy bychom dostali stejný poloměr. Pokud navíc uvažujeme, že jsou trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  navzájem kolmé, střed této kružnice  $h$  leží ve středu úsečky  $AB$ . Kružnici  $h$  můžeme proto také „rozpohybovat“, nechť tedy leží v pohybuující se rovině  $\Sigma$  (rýsuje ji na fólii). Při pohybu, se kružnice  $h$  pohybuje společně s body  $A, B$  a stále prochází bodem  $O$ . Bod  $X$ , jehož trajektorie  $\tau_X$  nás bude nyní zajímat, zvolme libovolně na této kružnici, viz obr. 5b). Tj. v libovolné poloze kružnice  $h$  jsme určili její libovolný bod  $X$  (bod  $X$  jsme nakreslili na fólii). Při experimentech s fólií a s GeoGebrou vidíme, že tentokrát elipsu nezískáme. Jen pozor na správné určení bodu  $X$  a jeho trajektorie především v GeoGebře. Protože bod  $X$  zakresluje na fólii, do pohybuující se roviny  $\Sigma$ , nemůže tento bod při pohybu měnit polohu vůči bodům  $A$  a  $B$ , to znamená, že všechny polohy trojúhelníku  $ABX$  jsou přímo shodné. V GeoGebře je tedy nutné volit pevné vzdálenosti bodu  $X$  od bodů  $A$  a  $B$ . Trajektorie  $\tau_X$  bodu  $X$  je v tomto případě úsečka. Důkaz provedme tentokrát syntetický. Jak jsme poznamenali, velikosti úseček  $AX$  a  $BX$  se při pohybu nemění. Všechny tři body leží v každé poloze pohybu na kružnici  $h$  opět v příslušné poloze, tedy délky oblouků  $AX$  a  $BX$  kružnice  $h$  jsou při pohybu konstantní. Úhel  $\sphericalangle AOX$  a stejně tak úhel  $\sphericalangle BOX$  tedy zůstávají při pohybu také konstantní, neboť vždy jedno rameno těchto úhlů,  $\tau_A$  nebo  $\tau_B$ , je pevné, druhé rameno úhlu  $OX$  musí být proto také pevné. Trajektorie  $\tau_X$  je proto úsečka ležící na přímce  $OX$ . Už snadno se nahlédne, že délka této úsečky je dvojnásobek průměru kružnice  $h$  a že střed úsečky splývá s bodem  $O$ .

Využijme tuto vlastnost pro další konstrukci. Vraťme se v úloze, k případu, kdy trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  svírají jiný než pravý úhel, sledujme obr. 6. Pro elipsu v obecné poloze, kterou jsme získali jako trajektorii  $\tau_L$  bodu  $L$ , určíme osy a hlavní a vedlejší vrcholy. Pro určení os elipsy využijeme vlast-

nosti, kterou jsme odvodili výše a to, že body speciálně zvolené kružnice  $h$  opsali při pohybu jako své trajektorie úsečky. Hledáme tedy takové přímé trajektorie dvou bodů kružnice  $h$ , které jsou navzájem kolmé. V dané poloze pohybu sestrojíme kružnici  $h$  (prochází body  $A$ ,  $B$  a  $O$ ), střed této kružnice označme  $H$ . Dále sestrojíme přímku  $HL$  (spojnici středu kružnice  $h$  a bodu  $L$ , který vykresluje trajektorii  $\tau_L$ ) a určíme průsečíky kružnice  $h$  s přímkou  $HL$ , označme tyto průsečíky jako  $P$ ,  $Q$ . Podle předchozího už víme, že trajektorie  $\tau_P$  a  $\tau_Q$  bodů  $P$  a  $Q$  jsou průměry kružnice  $k$  se středem v bodě  $O$  a poloměrem rovným dvojnásobku poloměru kružnice  $h$ . Přímkou  $OP$ ,  $OQ$  jsou osy elipsy  $\tau_L$ , neboť tato konstrukce odpovídá proužkové konstrukci vysvětlené v úloze, viz obr. 6.



Obr. 6 Konstrukce os elipsy v obecné poloze, která vzniká jako trajektorie bodu v eliptickém pohybu

Pro úplnost již bez důkazu doplníme, že trajektorie každého jiného bodu eliptického pohybu, tj. bodu, který v dané poloze neleží na příslušné poloze kružnice  $h$  a navíc je různý od bodů  $A$  a  $B$ , jsou elipsy.

### Poznámka

Kružnice  $h$  se nazývá *hybná polodie* a lze pomocí ní také určit pohyb rovinné soustavy tzv. *odvalováním*. O této problematice se plánujeme zmínit v dalších pojednáních o kinematicky vytvořených křivkách.

## Závěr

V příspěvku jsme ukázali výpočty kinematicky vytvořených křivek, speciálně elips, s využitím jednoduchých fyzických modelů a s podporou dynamického softwaru GeoGebra. Některé obrázky z GeoGebry jsou dostupné rovněž online [9]. Zde si lze vyzkoušet dynamičnost úloh a zkoumat další zadání, případně typy křivek.

Možnosti zadávání pohybu jsme ani zdaleka nevyčerpali. V příštím pojednání se zaměříme na křivky zadávané také obálkami a odvalováním hybné polodie po pevné polodii a ukážeme si, kde všude se s kinematicky vytvořenými křivkami lze setkat v běžném životě.

## Poděkování

Tato publikace byla podpořena programem Univerzitní výzkumná centra UK č. UNCE/HUM/024 a projektem PROGRES Q17 Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.

## Literatura

- [1] *Boček, L., Kubát, V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch. SPN, Praha, 1983.
- [2] *Hamhalter, J., Tišer, J.*: Integrální počet funkcí více proměnných. Skripta ČVUT, Praha, 2005.
- [3] *Kočandrla, M., Boček, L.*: Analytická geometrie, Matematika pro gymnázia, 1995.
- [4] *Kuřina, F.*: Začarovaný kruh školské geometrie. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 32 (1987), č. 5, s. 290–295.
- [5] *Lávička, M.*: Geometrie 2. Pomocný učební text, Západočeská univerzita, Plzeň, 2006.
- [6] *Leischner, P.*: O některých nedostacích výuky školské geometrie. Sborník příspěvků konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Vydavatelství servis, Plzeň, 2012, s. 101–105.
- [7] *Petáková, J.*: Matematika – Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Prometheus, Praha, 1998.
- [8] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2008.
- [9] *Surynková, P.*: GeoGebra kniha – Geometrie pohybu. Dostupné na: <https://ggbm.at/pkba7egj>
- [10] *Trávníček, S.*: Porozumění matematice. Matematika, fyzika, informatika, roč. 24 (2015), č. 1, s. 6–17.
- [11] *Urban, A.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavatelstvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.