Kuželosečky a Apolloniovy kružnice

JIŘÍ BLAŽEK – PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

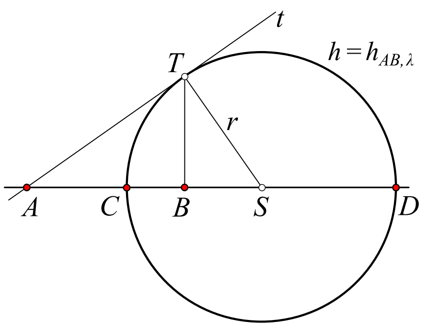
Pappova *Sbírka* (*Synagoge*, 3.–4. století n. l.) zmiňuje dva starší poznatky starověkých matematiků. Shrnujeme je do vět 1 a 2.

V nedávno otištěném příspěvku [1] jsme využili příbuznost obou tvrzení k důkazu ekvivalence různých definic elipsy. Postup, jenž tam byl uveden, lze aplikovat i na hyperbolu. Ponecháme na čtenáři, zda si to ověří, a poznatky rozšíříme z poněkud pozměněného pohledu.

Věta 1 (*Apolloniova kružnice*)

Nechť jsou v rovině dány dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda \neq 1$. Množinou všech bodů X dané roviny, pro něž platí $|AX| : |BX| = \lambda$, je kružnice $h_{AB,\lambda}$ sestrojená nad průměrem CD, kde C a D jsou body přímky AB splňující vztah

$$|AC| : |BC| = |AD| : |BD| = \lambda. \tag{1}$$



Obr. 1 Apolloniova kružnice

Důkaz věty 1 nalezne čtenář v článku [2]. Čtveřici bodů (A, B, C, D), které splňují vztah (1), budeme nazývat *harmonická čtveřice bodů*. Kružnice $h_{AB,\lambda}$ se nazývá *Apolloniova kružnice*. K dané dvojici (A, B) a číslu λ nalezneme zbývající body C a D jako obrazy bodu B ve stejnolehlostech se středem A a s koeficienty $\frac{\lambda}{\lambda \pm 1}$. Zřejmě se vždy jeden z bodů C, D nachází uvnitř úsečky AB a druhý vně. Vztah (1) je invariantní vůči záměně bodů C a D.

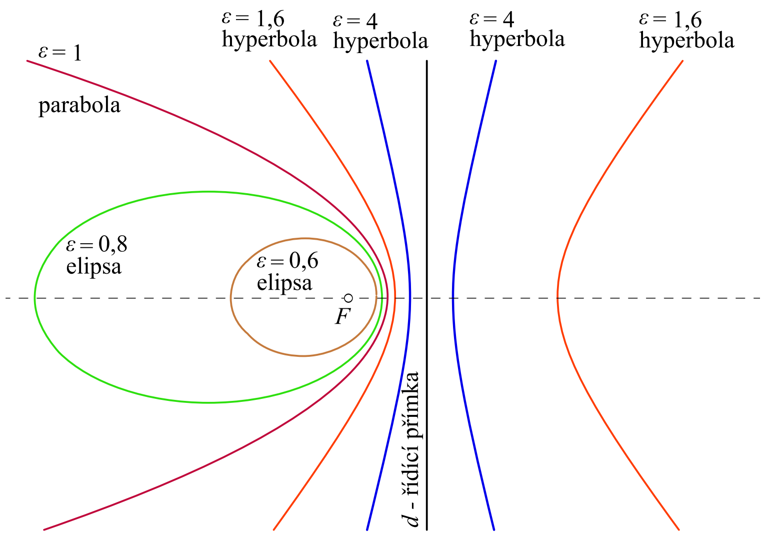
Při označení podle obr. 1 můžeme první z rovností (1) přepsat na tvar

$$\big(|AS| - r\big) : \big(r - |BS|\big) = \big(|AS| + r\big) : \big(r + |BS|\big),$$

kde S je střed kružnice h a r její poloměr. Po úpravě odtud dostaneme vztah

$$|AS| \cdot |BS| = r^2, \tag{2}$$

který umožňuje využít Eukleidovu větu o odvěsně k doplnění trojice (B, C, D) $\big($nebo $(A, C, D)\big)$ na harmonickou čtveřici (A, B, C, D), viz obr. 1.



Obr. 2 Kuželosečky jako množiny bodů X s vlastností $\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon$

Věta 2 (*Kuželosečky*)

Nechť je dáno kladné číslo ε a rovina, v níž je umístěna přímka d a bod $F \notin d$. Množinou všech bodů X, pro něž v dané rovině platí

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \tag{3}$$

je a) elipsa, právě když $\varepsilon < 1$, b) parabola, právě když $\varepsilon = 1$, c) hyperbola, právě když $\varepsilon > 1$.

Tvrzení b) z věty 2 je vlastně ohnisková definice paraboly. Ekvivalenci tvrzení a) s ohniskovou definicí elipsy jsme dokázali v [1]. Pro hyperbolu je důkaz ekvivalence s ohniskovou definicí analogický. Než se seznámíme s názornějším důkazem, připomeneme si základní poznatky o hyperbole.

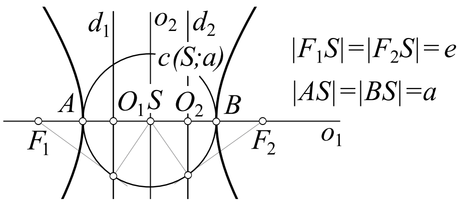
Ohnisková definice a základní vlastnosti hyperboly

Jsou-li F_1 a F_2 body dané roviny, pak množina všech bodů X v rovině, pro něž platí

$$\big||F_1X| - |F_2X|\big| = 2a, \quad \text{kde } 0 < 2a < 2e = |F_1F_2|. \tag{4}$$

se nazývá *hyperbola*. Body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska hyperboly*, čísla a, e jsou (v daném pořadí) *hlavní poloosa* a *výstřednost* (*excentricita*) hyperboly. *Relativní excentricita* (*poměrná výstřednost*) hyperboly je číslo $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Z definice plyne, že hyperbola je souměrná podle přímky F_1F_2, která se nazývá *hlavní osa hyperboly* a značí se o_1. Je souměrná i podle své *vedlejší osy* o_2, což je osa úsečky F_1F_2. Je též středově souměrná podle průsečíku obou os, *středu* S *hyperboly*. Kružnice $c(S; a)$ se nazývá *vrcholová kružnice hyperboly*. Pomocí obr. 3 snadno ověříme, že její průsečíky A a B s osou o_1 splňují vztah (4). Jsou to *vrcholy hyperboly*.



Obr. 3 Hyperbola, její vrcholová kružnice c a řídicí přímky d_1, d_2

Sestrojme dále přímky d_i ($i \in \{1, 2\}$) jako kolmice na hlavní osu v jejích bodech O_i, které získáme doplněním trojic (F_i, A, B) na harmonické čtveřice (F_i, O_i, A, B). Přímku d_i budeme nazývat *řídicí přímka hyperboly příslušná ohnisku* F_i.

Rovnost (2) má pro danou situaci tvar $|F_iS| \cdot |O_iS| = a^2$, z nějž plyne

$$|O_iS| = \frac{a^2}{e}. \tag{5}$$

S využitím obr. 3 dále zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}
|O_1A| &= |AS| - |O_1S| = \frac{a(e-a)}{e} = |O_2B|,\\
|O_1B| &= \frac{a(e+a)}{e} = |O_2A|.
\end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů a obrázku lze ověřit, že

$$\frac{|F_iA|}{|O_iA|} = \frac{|F_iB|}{|O_iB|} = \frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{|F_iA|}{|d_iA|} = \frac{|F_iB|}{|d_iB|}. \tag{6}$$

Platí tedy následující věta.

Věta 3
Apolloniovy kružnice $u_{F_1O_1,\varepsilon}$ a $u_{F_2O_2,\varepsilon}$ jsou totožné s vrcholovou kružnicí c hyperboly.

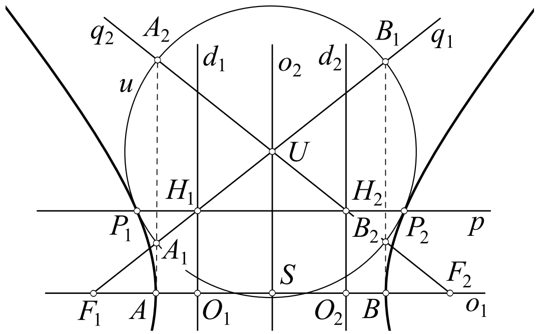
Kuželosečky jako obálky soustavy Apolloniových kružnic

Do dalších úvah přidáme množinu $\mathcal{M}$ všech přímek $p \parallel o_1$, položíme $\{H_i\} = p \cap d_i$ a přímky F_iH_i označíme q_i. Jejich průsečík U leží na ose o_2. Průměty bodů A a B na přímky q_i ve směru rovnoběžném s osou o_2 označíme po řadě A_i a B_i (obr. 4).

Kružnice $u = (U; |UA_1|)$ má průměry A_iB_i a je a je totožná s Apolloniovými kružnicemi $u_{F_iH_i,\varepsilon}$, neboť rovnoběžné promítání zachovává poměry na přímkách. Pomocí jejích vlastností a obr. 4 snadno ověříme, že (bez ohledu na to, zda ve vztazích zvolíme $i = 1$, nebo $i = 2$) pro její průsečíky P_1 a P_2 s přímkou p platí

$$\frac{|P_1F_i|}{|P_1d_i|} = \frac{|P_1F_i|}{|P_1H_i|} = \varepsilon = \frac{|P_2F_i|}{|P_2H_i|} = \frac{|P_2F_i|}{|P_2d_i|}. \tag{7}$$

Zjistili jsme, že množina $\mathcal{P}$ všech bodů P_i, kde $i \in \{1, 2\}$ a $p \in \mathcal{M}$ je rovna množině z věty 2 pro $\varepsilon > 1$, ať již zvolíme $F = F_1$ a $d = d_1$, nebo $F = F_2$ a $d = d_2$. Přímky p totiž pokrývají celou rovinu a vztah (3) na nich splňují jen průsečíky P_i přímky p s kružnicí u.



Obr. 4 Apolloniova kružnice $u = u_{F_iH_i,\varepsilon}$

Množina $\mathcal{P}$ je též hyperbolou ve smyslu ohniskové definice, protože ze vztahů (7) a (5) plyne

$$\big||P_iF_2| - |P_iF_1|\big| = \varepsilon\big||P_iH_2| - |P_iH_1|\big| = 2|O_1S| \cdot \varepsilon = 2\frac{a^2}{e} \cdot \frac{e}{a} = 2a.$$

Dokázali jsme větu 2 pro $\varepsilon > 1$. Pro elipsu ($\varepsilon < 1$) je důkaz analogický.

Množinu všech kružnic $u_{F_iH_i,\varepsilon}$ příslušných dané kuželosečce budeme označovat $\mathcal{U}$. Je určena například hlavními vrcholy A, B a relativní excentricitou ε. Obr. 4 naznačuje, že se kružnice u dotýká v bodech P_i kuželosečky. Abychom se o tom přesvědčili, dokážeme následující větu.

Věta 4

Hyperbola (nebo elipsa) a kružnice $u \in \mathcal{U}$ mají ve svých společných bodech P_i společné tečny.

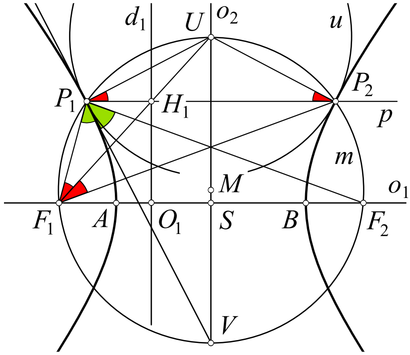
Důkaz. Pro hyperbolu na obr. 5 lze pomocí (2) zjistit $|UP_2|^2 = |UF_1|\cdot|UH_1|$ a odtud

$$\frac{|UP_2|}{|UF_1|} = \frac{|UH_1|}{|UP_2|}.$$

Trojúhelníky UP_2F_1 a UH_1P_2 se navíc shodují v úhlu při vrcholu U. Z jejich podobnosti (věta *sus*) a symetrie podle osy o_2 plyne

$$|\sphericalangle P_2F_1U| = |\sphericalangle H_1P_2U| = |\sphericalangle P_1P_2U| = |\sphericalangle P_2P_1U|.$$

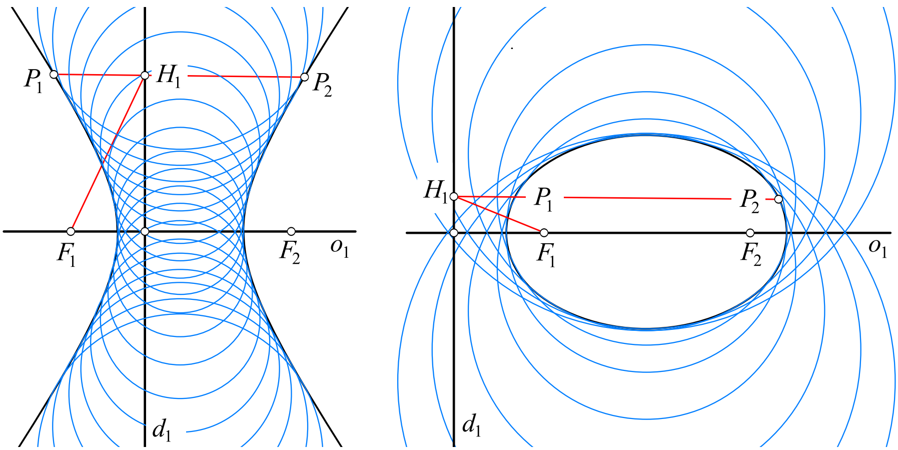
Úhly P_2P_1U a P_2F_1U jsou obvodové, body P_2, U, P_1 a F_1 leží na kružnici, kterou označíme m. Leží na ní i bod F_2 a její průměr UV je částí osy o_2.



Obr. 5 K důkazu věty 4 pro hyperbolu

Přímka VP_1 je tečnou kružnice u, protože úhel UP_1V je pravý (Thaletova věta). Je i tečnou hyperboly v bodě P_1, neboť je osou úhlu $F_1P_1F_2$. (Shodným obloukům F_1V a VF_2 kružnice m přísluší shodné obvodové úhly F_1P_1V a VP_1F_2.) Pro elipsu je důkaz analogický.

Z věty 4 plyne, že Apoloniovy kružnice $u_{F_iH_i,\varepsilon}$ obalují danou kuželosečku (obr. 6).

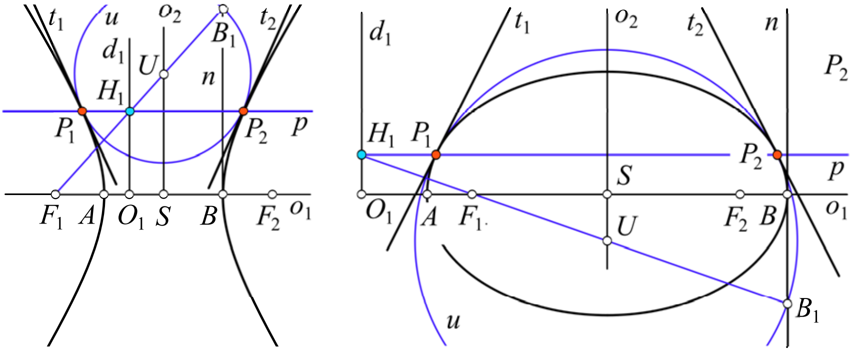


Obr. 6 Kružnice množiny $\mathcal{U}$ obalují hyperbolu ($\varepsilon > 1$) a elipsu ($\varepsilon < 1$)

Využití Apolloniových kružnic ke konstrukci kuželoseček

Uvedené poznatky umožňují jednoduchou konstrukci bodů P kuželosečky ve zvolené vzdálenosti od její hlavní osy.

Je-li kuželosečka dána například vrcholy A, B a ohniskem F_1 umístěnými na ose o_1, doplníme nejprve do zadání přímky o_2, d_1 a kolmici n na osu o_1 v bodě B (obr. 7).



Obr. 7 Konstrukce bodů a tečen hyperboly a elipsy

Konstrukci bodů pak provádíme takto: Ve zvolené vzdálenosti vedeme rovnoběžku p s osou o_1 a její průsečík s přímkou d_1 označíme H_1. Body U a B_1 nalezneme jako průsečíky přímky F_1H_1 s přímkami o_2 a n. Nakonec sestrojíme kružnici $u(U; |UB_1|)$ a body $P_i \in p \cap u$. Tečny t_1, t_2 kružnice u v těchto bodech jsou tečnami kuželosečky.

Jinou konstrukci jsme uvedli pro elipsu v poznámce 3 v článku [1]. Využívala poznatek, který zobecníme do věty 5.

Pro další úvahy zavedeme *řídicí kružnici* $k(F_2; 2a)$ kuželosečky jako obraz vrcholové kružnice c ve stejnolehlosti $\mathcal{H}_{F_1,2}$. Z ohniskové definice plyne, že pro každý bod $N \in k$ je průsečík P přímky F_2N s osou o úsečky F_1N bodem hyperboly.

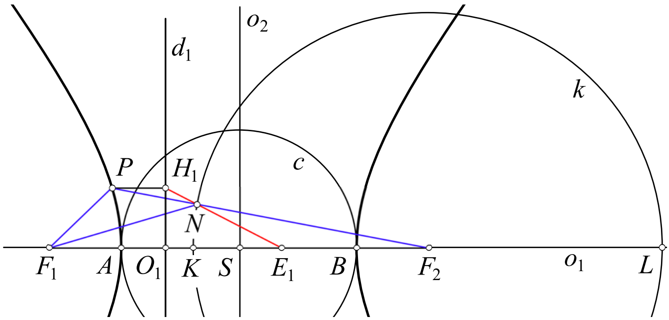
Věta 5

Jestliže je bod P kuželosečky určen bodem N na řídicí kružnici k a H_1 je kolmý průmět bodu P na řídicí přímku d_1, pak přímka H_1N prochází obrazem E_1 ohniska F_1 v osové symetrii podle přímky d_1.

Důkaz provedeme pro hyperbolu. Pro elipsu je analogický. Bod P hyperboly znázorněný na obr. 8 je zřejmě i obrazem bodu F_2 ve stejnolehlosti

$\mathcal{H}_{N,\kappa}$, kde

$$|\kappa| = \frac{|NP|}{|NF_2|} = \frac{|F_1P|}{2a} \tag{8}$$



Obr. 8 K důkazu věty 5

Stejnolehlost $\mathcal{H}_{F_1,2}$ zobrazuje úsečku O_1S na úsečku E_1F_2. Odtud a z (5) plyne

$$|E_1F_2| = 2\frac{a^2}{e}. \tag{9}$$

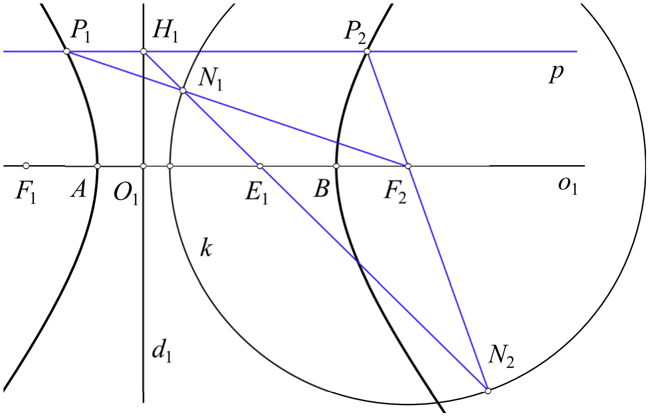
Z věty 2 a vztahů (8) a (9) dále zjistíme

$$|PH_1| = \frac{|F_1P|}{\varepsilon} = \frac{|\kappa| \cdot 2a}{\varepsilon} = |\kappa| \cdot \frac{2a^2}{e} = |\kappa| \cdot |E_1F_2|.$$

Stejnolehlost $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ tedy zobrazuje úsečku F_2E_1 na úsečku PH_1 a bod E_1 do bodu H_1. Přímka E_1H_1 prochází středem N stejnolehlosti.

Ověření, že postup důkazu lze úspěšně použít i pro bod druhé větve hyperboly, přenecháme čtenáři. Jiný důkaz věty 5 lze provést zobecněním části důkazu věty 4 z článku [1].

Konstrukci bodů hyperboly s pomocí věty 5 znázorňuje obr. 9: Ve zvolené vzdálenosti od osy o_1 zvolíme bod $H_1 \in d_1$ a sestrojíme body N_i jako průsečíky přímky E_1H_1 s řídicí kružnicí k. Hledané body P_i jsou průsečíky přímek F_2N_i s přímkou $p \parallel o_1$ vedenou bodem H_1. Analogickou konstrukci pro elipsu jsme uvedli v [1].

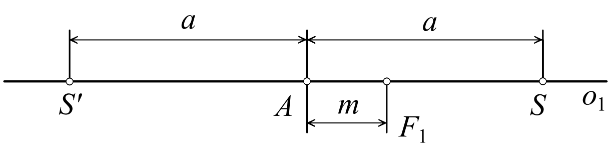


Obr. 9 Využití věty 5 ke konstrukci bodů hyperboly

Řešená úloha místo závěru

Věta 2 nabízí otázku jak se liší elipsa od hyperboly, když jsou jejich relativní excentricity blízké číslu 1. Řešení níže uvedené úlohy pomocí dynamické geometrie umožní žákům vytvořit si o tom názornou představu.

Úloha. Pomocí dynamické geometrie sestrojte všechny kuželosečky, které mají v dané rovině pevně zvolen vrchol A a ohnisko F_1, jestiže navíc platí $a = k \cdot |AF_1|$, kde $k > 1$. Zkoumejte jejich tvar pro různé hodnoty a.



Obr. 10 Ke konstrukci středu kuželosečky

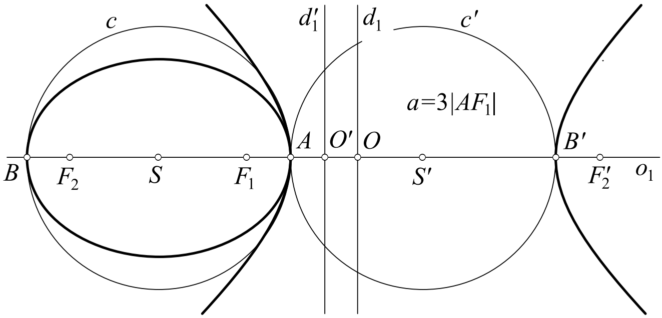
Řešení. Kružnice $l(A; a)$ protne osu o_1 v bodech S a S'. Při označení podle obr. 10 je S' středem hyperboly a S středem elipsy. Platí

$$\varepsilon', \varepsilon = \frac{a \pm m}{a} = 1 \pm \frac{m}{a} = 1 \pm \frac{1}{k}$$

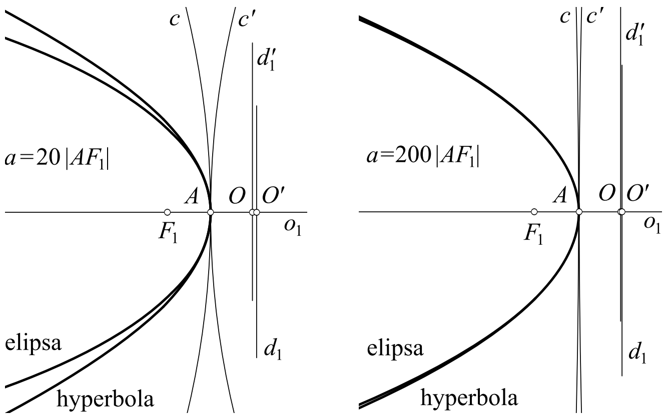
a odtud

$$\lim_{k \mapsto \infty} \varepsilon' = \lim_{k \mapsto \infty} \varepsilon = 1.$$

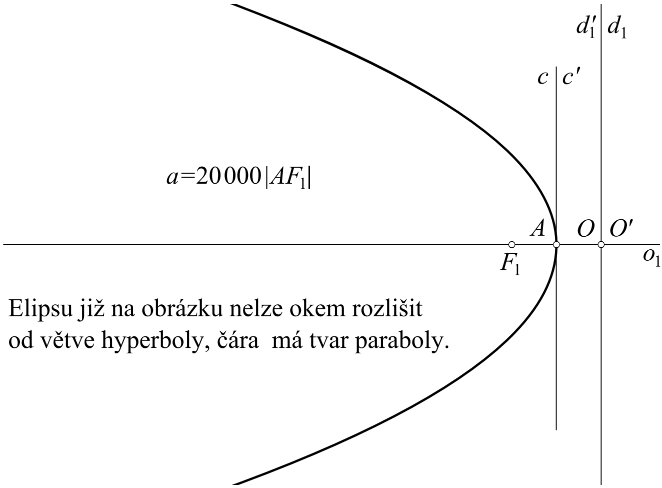
Obrázky 11 až 13 ilustrují vyřešení úlohy v *Cabri*. Body A a F_1 byly zvoleny pevně a číslo k jako volitelný parametr. Ke zvolené hodnotě k program vždy určí $a = k \cdot |AF_1|$ a zobrazí středy S, S' (pokud nejsou příliš daleko), řídící přímky d, d' a vrcholové kružnice c, c'. Konstrukci kuželosečky provádí z jejích pěti bodů sestrojených jedním z výše uvedených postupů. Pomocné čáry jsou skryty.



Obr. 11 Elipsa a hyperbola pro $a = 3|AF_1|$



Obr. 12 Elipsa a hyperbola pro $a = 20|AF_1|$ a pro $a = 200|AF_1|$



Obr. 13 Elipsa a hyperbola pro $a = 20\,000|AF_1|$

Literatura

[1] *Blažek, J., Leischner, P.*: Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou? MFI, roč. 28 (2019), č. 2, s. 81–91.

[2] *Leischner, P.*: Polibky kružnic – Intermezzo. MFI, roč. 24 (2015), č. 3, s. 177–184.