MATEMATIKA

Geometrie pohybu II: Obálky křivek

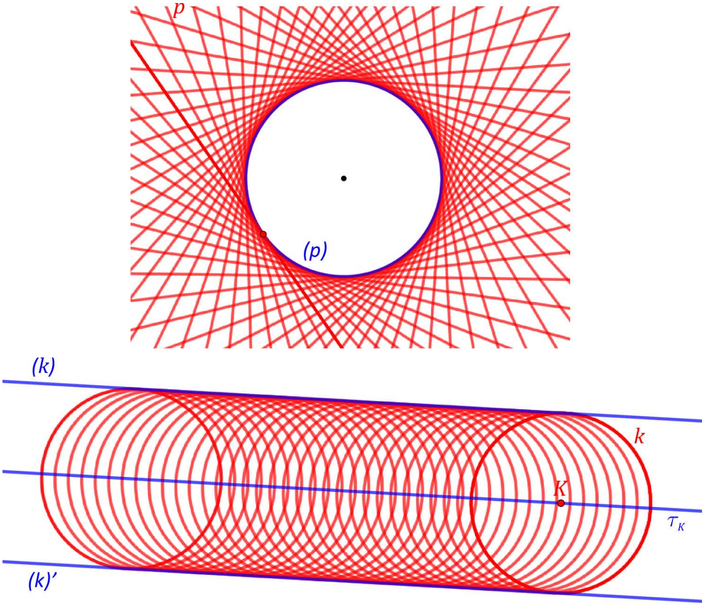
PETRA SURYNKOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V prvním díle série Geometrie pohybu jsme si ukázali stručný úvod do kinematické geometrie v rovině s ohledem na možné použití vybrané teorie ve výuce na střední škole. Demonstrovali jsme zadávání pohybu pomocí jednoduchých pomůcek – průsvitné fólie a papíru, a rovněž jsme si ukázali, jak lze k modelování pohybu použít dnes velmi rozšířený software GeoGebra. Podrobněji jsme se věnovali pohybu zadanému pomocí trajektorií a speciálně jsme se zaměřili na pohyb eliptický. Odvodili jsme parametrická vyjádření elips vytvořených kinematicky a to i v obecné poloze pro konkrétní zadání transformace soustavy souřadnic. Jak jsme se zmínili již v minulém díle, lze odvodit také jiná určení pohybu než pomocí dvou trajektorií dvou různých bodů. Nadále budeme vylučovat speciální pohyby, tedy rotaci a přímočaré posunutí a rozšíříme naše úvahy o další možnost zadání pohybu:

Pohyb roviny Σ je jednoznačně určený, známe-li obálky dvou různých křivek roviny Σ.

Obě obálky přitom mohou být křivky (dokonce i s více větvemi), nebo se jedna nebo obě mohou redukovat na bod. Vysvětleme to na příkladě. Představme si kružnici a všechny její tečny, tj. přímky, které se kružnice dotýkají v každém jejím bodě. Kružnice je tedy obálkou této soustavy tečen. Chápat můžeme tuto situaci i kinematicky. Tečna se pohybuje tak, že postupně obaluje kružnici. Případ tzv. bodové obálky si jednoduše představíme na svazku přímek. Opět z pohledu kinematické geometrie můžeme uvažovat přímku a otáčet ji kolem pevného bodu, který na ní leží. Bod můžeme chápat jako kružnici s nulovým poloměrem. Bod je tedy obálkou jednotlivých poloh otáčející se přímky. Příkladem obálky s více větvemi může být ekvidistanta dané přímky, která vznikne jako obálka kružnice, jejíž střed se pohybuje po této dané přímce. Na obr. 1 můžeme vidět kružnici vytvořenou jako obálku množiny všech jejích tečen, dále je na obrázku kinematicky vytvořena ekvidistanta přímky jako obálka kružnice, jejíž střed se pohybuje po přímce.



Obr. 1 Ukázky obálek

Další informace o kinematické geometrii v rovině lze nalézt v odborné literatuře, jmenujme například [4]. Studiu křivek se věnují také další publikace, např. [1, 2].

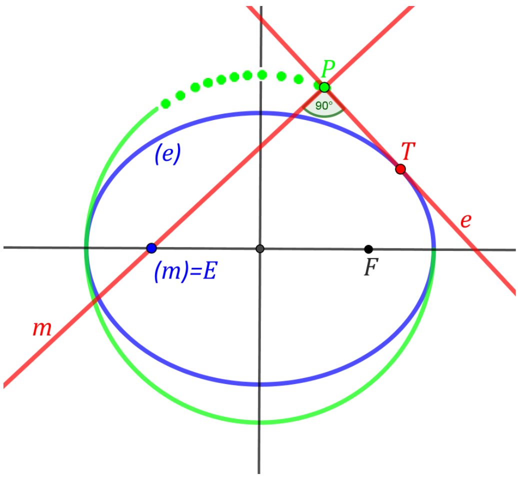
Na následujících příkladech demonstrujme užití obálek křivek při pohybu. V prvním případě je pohyb v rovině pomocí dvou obálek dvou křivek zadán a úkolem je určit trajektorii nějakého bodu. Ve druhém případě se vracíme k zadání pohybu pomocí trajektorií dvou bodů. Obálku nějaké křivky v tomto případě hledáme.

Příklady kinematicky vytvořených křivek

Úloha 1

Mějme dánu elipsu (e) a bod $(m) = E$, tj. bodová obálka je rovna jednomu ohnisku elipsy. Sestrojte trajektorii vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno e obaluje elipsu (e) a druhé rameno m stále prochází bodem (m), obaluje jej.

Řešení. Vrchol pravého úhlu označme P, sledujme obr. 2. Opět můžeme zrealizovat pomocí průsvitné fólie simulaci pohybu, tj. na papír zakreslíme elipsu (e) a vyznačíme ohnisko $(m) = E$, na fólii vyznačíme ramena pravého úhlu. Vše, co je zakreslené na fólii, je neměnné, tj. pravý úhel zůstává konstantní.

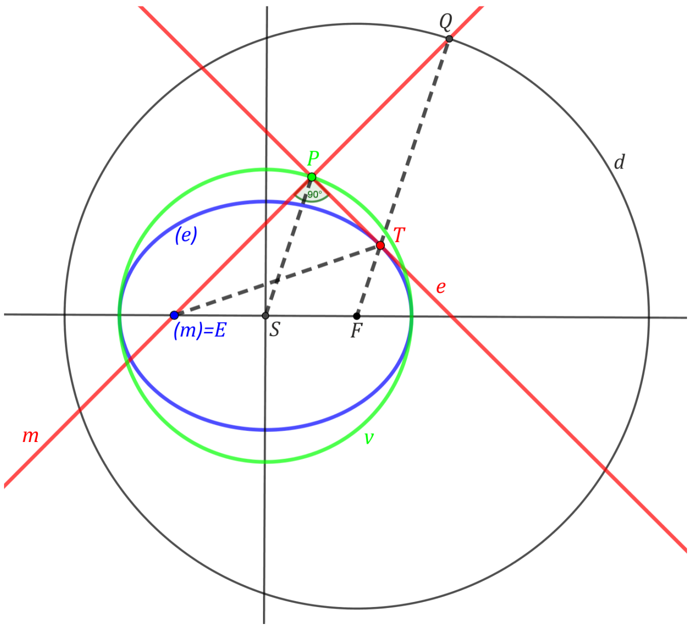


Obr. 2 Pohyb zadaný dvěma obálkami navzájem kolmých přímek, z nichž jedna je bod a druhá elipsa

V GeoGebře jsme zadali elipsu (e) s ohniskem $(m) = E$ a výchozí polohu pohybujících se objektů. To znamená, určili jsme bod T tak, že se může pohybovat pouze po elipse (e). V bodě T jsme sestrojili tečnu k elipse (e), tj. přímku e. Z ohniska $(m) = E$ jsme spustili kolmici m na přímku e a patu této kolmice jsme označili P. Dostali jsme tak obě ramena pravého úhlu s vrcholem P. V GeoGebře můžeme nyní hýbat bodem T a sledovat dráhu bodu P. Příklad zpracovaný v GeoGebře lze opět otevřít ve webovém prohlížeči, viz [3].

Podle obr. 2 a experimentů s fólií, vidíme, že trajektorií τ_P je kružnice se středem ve středu elipsy (e) a poloměrem rovným velikosti její hlavní poloosy. Přesvědčme se o tom důkazem.

Sledujme obr. 3. Sestrojme bod Q, jenž je souměrný s ohniskem $(m) = E$ podle tečny e. Z definice elipsy platí, že $|ET| + |FT| = 2a$, kde F je druhé ohnisko elipsy a a je velikost hlavní poloosy. Ze souměrnosti podle tečny platí, že $|ET| = |QT|$. Z toho plyne, že $|QT| + |FT| = 2a$. Body Q, T, F jsou kolineární, neboť tečna elipsy v bodě T je osou vnějších úhlů jeho průvodičů. Platí tedy $|QF| = 2a$. Pokud sestrojíme bod Q pro každou polohu tečny e, dostaneme kružnici se středem v bodě F o poloměru $2a$. Tato kružnice je tzv. *řídicí* kružnice elipsy, na obr. 3 označena jako d.



Obr. 3 Trajektorie vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno e obaluje elipsu (e) a druhé rameno m obaluje bod (m)

Analogicky lze sestrojit druhá řídicí kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměrem $2a$, pokud bychom bodovou obálku zvolili v ohnisku F a druhé rameno pravého úhlu by byla opět tečna elipsy. Bod Q bychom tedy sestrojovali jako bod souměrný podle tečny s ohniskem F. Řídicí kružnici využijeme v důkazu dále. Pro vrchol pravého úhlu, bod P, platí $\{P\} = e \cup QE$. Z předchozího dále plyne, že úsečka PS, kde S je střed elipsy, je střední příčkou trojúhelníku EFQ, tj. $|SP| = 1/2|QF| = a$. Pokud uvažujeme tečnu e v některém z hlavních vrcholů elipsy, potom bod P s tímto hlavním vrcholem splývá, tj. stále platí $|SP| = a$. Paty všech kolmic spuštěných z ohniska E na tečny elipsy leží na kružnici se středem v bodě S o poloměru a. Tato kružnice je tzv. *vrcholová* kružnice elipsy, na obr. 3 označena jako v. Analogicky bychom postupovali, pokud bychom bodovou obálku zvolili v ohnisku F a druhé rameno pravého úhlu by byla opět tečna elipsy. Dostali bychom tak stejnou vrcholovou kružnici.

V první úloze jsme tímto popsali příklad křivky tzv. *úpatnice*. Popišme tento druh křivky obecně v následující definici.

Definice

Úpatnice je trajektorie vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno obaluje křivku a druhé obaluje bod.

Dodejme, že obdobným příkladem úpatnice je také vrcholová kružnice hyperboly či vrcholová tečna paraboly pro bodovou obálku v ohnisku těchto kuželoseček.

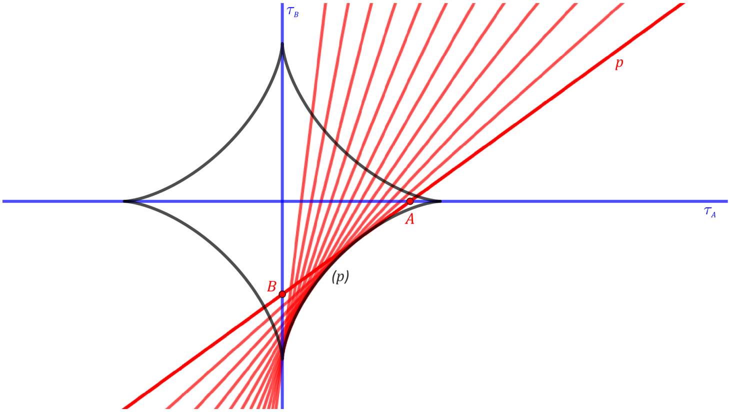
Kinematická geometrie studuje také další typy křivek, nejen středoškolským studentům známé kuželosečky. S využitím GeoGebry můžeme složitější křivky objevovat i na střední škole přinejmenším na experimentální úrovni. Pro úplnost v následujícím příkladě uvádíme i analytické vyjádření zkoumané křivky.

Úloha 2

Mějme dány dvě různoběžné přímky τ_A a τ_B. Sestrojte obálku přímky $p = AB$, jestliže se bod A pohybuje po přímce τ_A a bod B po přímce τ_B. Uvažujte pouze případ kolmých trajektorií τ_A a τ_B.

Řešení. Sledujme obr. 4. Situaci jsme opět zakreslili v programu GeoGebra a vykreslili jsme několik poloh pohybující se přímky $p = AB$. V GeoGebře lze rovněž zapnout kreslení dráhy objektu, to znamená, zvolíme-li tuto možnost pro pohybující se přímku, můžeme vidět a experimentálně odhadnout tvar křivky, kterou přímky obalují. To samé můžeme zrealizovat pomocí papíru a průsvitné fólie.

Pohyb jsme v GeoGebře definovali stejně jako v úloze v minulém díle, tj. zvolili jsme pevně trajektorie τ_A a τ_B a výchozí polohu přímky $p = AB$. Nejdříve jsme určili bod A tak, že se může pohybovat pouze po trajektorii τ_A a zvolili jsme délku úsečky AB. Pro danou polohu bodu A jsme tím



Obr. 4 Obálka přímky, jejíž dva různé body opisují navzájem kolmé přímé trajektorie

pádem dostali polohu přímky AB, neboť víme, že bod B se pohybuje po své trajektorii τ_B. V tomto případě takto dostaneme pro danou polohu bodu A dvě polohy bodu B (bude patrné také z výpočtu), tj. dvě polohy pohybující se soustavy Σ. Příklad zpracovaný v GeoGebře lze opět otevřít ve webovém prohlížeči, viz [3].

Podle obr. 4 a experimentů s fólií, můžeme zkusit odhadnout a načrtnout křivku, která se dotýká všech poloh pohybující se přímky $p = AB$. Křivka je na první pohled osově symetrická podle přímek τ_A a τ_B. Odvoďme matematický předpis této křivky.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic, trajektorie τ_A a τ_B nechť splývají s osami x, y. Vzdálenost bodů $A = [a, 0]$ a $B = [0, b]$ označme d a zvolme ji pevně. Souřadnice bodu B tedy lze zapsat v závislosti na této délce, tj. $B = [0, \pm\sqrt{d^2 - a^2}]$. Přímku p můžeme vyjádřit obecnou rovnicí $bx + ay - ab = 0$, neboť $\boldsymbol{n} = (a, b)$ je normálový vektor přímky.

Rovnici přímky můžeme přepsat

$$\sqrt{d^2 - a^2}x + ay - a\sqrt{d^2 - a^2} = 0 \tag{1}$$

pro $b \geq 0$ a

$$-\sqrt{d^2 - a^2}x + ay + a\sqrt{d^2 - a^2} = 0 \tag{2}$$

pro $b < 0$.

Měníme-li polohu bodu A, tj. a je parametrem v rovnicích (1) a (2), dostáváme jednoparametrickou soustavu přímek v rovině. Nyní hledáme křivku, která se dotýká všech křivek této jednoparametrické soustavy, tj. hledáme obálku. Analyticky se nalezení rovnice obálky provede tak, že z rovnice (1), respektive (2), vypočteme derivace podle parametru a. Tedy po úpravě dostáváme

$$\frac{a^3 - d^2x}{a^2\sqrt{d^2 - a^2}} = 0, \tag{3}$$

respektive

$$\frac{-a^3 + d^2x}{a^2\sqrt{d^2 - a^2}} = 0. \tag{4}$$

Z rovnic (1) a (3), respektive (2) a (4), vyjádříme x a y jako funkce parametru a a dostaneme tak parametrické vyjádření obálky, tj.

$$x = \frac{a^3}{d^2}, \quad y = \frac{(d^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2}, \tag{5}$$

respektive

$$x = \frac{a^3}{d^2}, \quad y = -\frac{(d^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2}. \tag{6}$$

Rovnice (5) vyjadřuje část křivky nad osou x, rovnice (6) potom část křivky pod osou x. Výslednou obálku lze vyjádřit také implicitně vyloučením parametru a z rovnic (1) a (3), respektive (2) a (4), tj.

$$3d^2x^2 - 3d^{\frac{8}{3}}x^{\frac{4}{3}} + d^{\frac{10}{3}}x^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{4}{3}}x^{\frac{8}{3}} - d^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^2 = 0 \tag{7}$$

Křivka popsaná rovnicemi (5) a (6) nebo rovnicí (7), kterou jsme získali jako obálku jednoparametrické soustavy přímek, se nazývá *astroida*, na obr. 4 je označena jako (p). Podrobněji o výpočtech parametrického vyjádření obálek a o dalších zajímavých křivkách kinematické geometrie pojednává např. [2]. Příklad této křivky už je nad rámec středoškolského učiva, ale uvádíme jej pro zajímavost, abychom viděli, jak lze v GeoGebře provádět experimenty i se složitějšími křivkami.

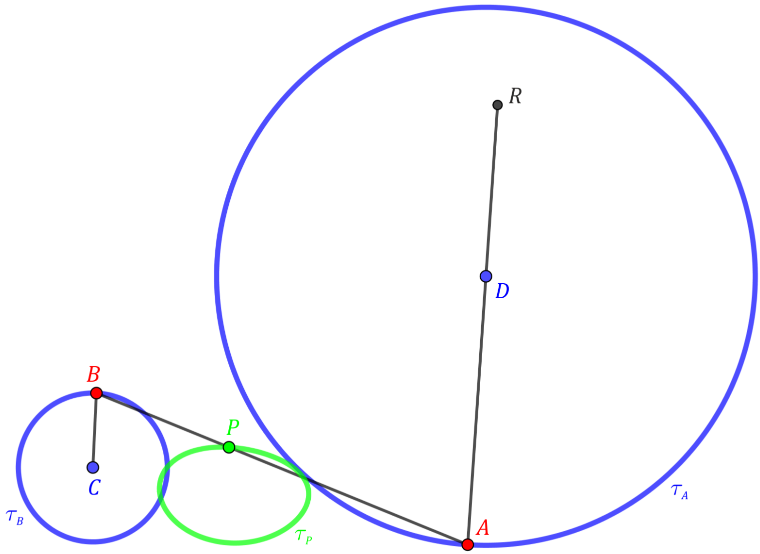
Poslední úlohu necháváme čtenáři k zamyšlení. Na základě uvedených poznatků z kinematické geometrie v rovině už nebude těžké některé základní konstrukce vyučované na střední škole zadávat právě z pohledu kinematické geometrie. Podívejme se na následující zadání.

Úloha 3

Mějme dány dvě bodové obálky (a) a (b) přímek a a b. Sestrojte trajektorii průsečíku přímek a a b. Uvažujte zvlášť případ kolmých přímek a a b a případ, kdy přímky a a b svírají obecný úhel.

Kde všude můžeme pozorovat principy a poznatky z kinematické geometrie?

Jistě nás napadne otázka, proč je vůbec důležité hovořit o kinematicky vytvořených křivkách. V praxi se s nimi totiž setkáváme doslova na každém rohu. Připomeňme například různá ozubená soukolí, která jsou součástí převodovek a dalších strojů, klikové mechanismy nebo běžně známější nůžkový hever pro zvedání automobilu. Představit si dále můžeme například mechanismus otevírání dveří u kufru automobilu. Velmi zajímavým příkladem kinematické geometrie v praxi je eliptický trenažér. Na obr. 5 můžeme vidět zjednodušený model jedné jeho pohybující se části.



Obr. 5 Model jedné části eliptického trenažéru

Konec ramene řídítek, bod A, opisuje část kružnice τ_A. Řídítka držíme za bod R. Pedál, na kterém stojíme, zde zjednodušeně zakreslen jako bod P, leží na úsečce spojené s bodem B, který se pohybuje po kružnici τ_B. Body C a D jsou středy kružnic τ_A a τ_B a zůstávají při pohybu na místě. Čtyřúhelník $ABCD$ na obr. 5 se potom označuje jako kloubový čtyřúhelník. Nyní můžeme zkoumat, jakou trajektorii opisuje bod P. Podle obr. 5 bychom se mohli domnívat, že se jedná o elipsu. Výpočtem lze ukázat, že jde o obecnější křivku, jejíž tvar je závislý na vzdálenosti bodu P od krajních bodů pohybující se úsečky. Animaci části eliptického trenažéru si lze rovněž vyzkoušet ve webovém prohlížeči přímo v GeoGebře, viz [3].

Další praktická využití kinematické geometrie v reálných aplikacích lze najít v naší knize Atlas geometrie, [5].

Závěr

V příspěvku jsme ukázali výpočty dalších kinematicky vytvořených křivek s podporou dynamického softwaru GeoGebra. Některé obrázky z GeoGebry jsou dostupné rovněž online, [3]. Zde si lze vyzkoušet dynamičnost úloh a zkoumat další zadání, případně typy křivek.

Možnosti zadávání pohybu, ani praktické příklady kinematické geometrie, jsme ani tentokrát zdaleka nevyčerpali. V dalším pojednání se zaměříme na křivky zadávané také odvalováním hybné polodie po pevné polodii a ukážeme si další praktická využití.

Poděkování

Tato publikace byla podpořena programem Univerzitní výzkumná centra UK č. UNCE/HUM/024 a projektem PROGRES Q17 Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.

Literatura

[1] *Boček, L., Kubát, V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch. SPN, Praha, 1983.

[2] *Drábek, K., Harant, F., Setzer, O.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1979.

[3] *Surynková, P.*: GeoGebra kniha – Geometrie pohybu. Dostupné na: `https://ggbm.at/pkba7egj`

[4] *Urban, A.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.

[5] *Voráčová, Š.*: Atlas geometrie, Academia, Praha, 2012.