

Problém s poštou

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Ve škole i na stránkách tohoto časopisu se setkáváme s různými úlohami. Tyto úlohy obvykle vyžadují určité znalosti a schopnost je využít a obvykle se v příští hodině nebo v příštím čísle dozvíme řešení. Dnes vám chceme ukázat příklad jedné úlohy, těžké úlohy, na kterou se asi musí jít trochu jinak. A jestli vám ukážeme řešení, bude záležet i na vás.

Úloha

Země Z sestává z 1 024 měst ležících ve vrcholech čtvercové sítě 32×32 měst. V zemi Z se právě chystají přeorganizovat doručování pošty a od vás očekávají, že jim poradíte jak na to. Přitom musí být splněny následující podmínky:

- Dopisy se podávají i vyzvedávají na poště.
- V každém městě je právě jedna pošta.
- Mezi městy dopisy převázejí poštovní auta.
- Cesta mezi dvěma sousedními městy trvá 6 minut.
- Zastávka, při které jsou nakládány a vykládány dopisy, trvá 15 minut.
- Dopis k naložení musí být přítomen nejpozději 15 minut před odjezdem auta.
- Vyložený dopis si bude moci adresát převzít 15 minut po příjezdu auta.
- V případě překládání dopisu z auta do auta stačí 15 minut na jeho naložení i vyložení.
- Každý dopis musí být doručen nejpozději 24 hodin po podání.

Navrhněte řešení s minimálním počtem aut.

Problém s úlohou

Úlohy, se kterými se setkáváme ve škole, obvykle mají řešení. Tím myslíme, že existuje správná odpověď, která splňuje zadání.

Jenže v praxi potkáváme mnoho úloh, které (jedinou) správnou odpověď nemají.

Opravdu? No opravdu – třeba jízdní řád vlaků (autobusů, městské dopravy, letadel, ...), to je úloha, která nemá jediné nejlepší řešení.

Nebo je také potřeba ve škole pro každý rok vytvořit rozvrh (proč není pokaždé stejný?). Nebo politici neustále hledají ten správný způsob, jak spravovat naše společné záležitosti a ty správné zákony, kterými by se lidé měli řídit.

Jakže znělo to zadání? „Navrhněte řešení s minimálním počtem aut.“ Co se myslí tím *minimálním*? Nejmenší možný? A kolik to je? A je potřeba umět dokázat, že je to nejmenší možný počet, tedy že řešení s menším počtem aut neexistuje?

Kdybychom znali autora té úlohy, měli bychom se zeptat, jak to myslel. A autor by odpověděl, že myslel *co nejmenší, nejmenší, jaký dokážete* nebo *čím menší, tím lepší*.

Takže teď víme, že se po nás chce, abychom našli nějaký způsob, jak dopravovat poštu, a když budeme mít dva různé způsoby, umíme rozhodnout, který je lepší – ten, který bude vyžadovat méně aut.

Pokud nějaké řešení vymyslíte, pošlete nám ho, napište jména autorů a školu a my ho zveřejníme.

Jak hledat?

Nejlepší způsob, způsob vyžadující nejmenší počet aut – tak to by stačilo prozkoumat všechny způsoby a z nich vybrat ten nejlepší! Ano, stejně jako by stačilo prozkoumat všechny jízdní řády nebo všechny rozvrhy – asi už tušíte, že to nepůjde, protože těch možností je tolik, že to nemůžeme stihnout, a to ani kdybychom měli počítač a tisíc počítačů a milion počítačů. Stáří vesmíru je údajně jen 10^{16} sekund a čísla v kombinatorických výpočtech rostou velice rychle. Tak můžeme sedět, kousat tužku nebo hledět do mraků a čekat, až nás něco napadne (když napadne, pošlete, zveřejníme).

Hledáme...

Jeden způsob jak hledat je vzít si jakékoliv řešení a zkusit ho zlepšit. Vymyslet jakékoliv řešení není tak obtížné jako vymyslet *co nejlepší* řešení. Jedno *jakékoliv řešení* by mohlo vypadat třeba tak, že pro každou dvojici měst A a B bude přiděleno jedno auto, které mezi nimi bude nejkratší cestou jezdit a dopisy dopravovat. Stihne se to? Největší vzdálenost je mezi dvěma protilehlými rohy, a to 31 úseků silnice vodorovně a 31 úseků

svisle. To je 62 úseků jízdy, to je 6,2 hodin tam, 6,2 hodin zpátky a k tomu dvě patnáctiminutové zastávky, to je dohromady 12,9 hodin. Pokud někdo v nejhorsím případě přinese na poštu dopis ve chvíli, kdy už ho auto nestačí naložit, bude muset (ten dopis) 12,9 hodin čekat, až se auto vrátí, a pak čtvrt hodiny nakládání, 6,2 hodiny jízda, čtvrt hodiny vykládání – to máme

$$12,9 + 0,25 + 6,2 + 0,25 = 19,6 \text{ hodin.}$$

To je nejhorší případ, všechny ostatní jsou stejné nebo kratší. Takže se to stihne. Máme jedno *jakékoliv řešení*.

Není moc dobré – kolik že budeme potřebovat aut? Jedno auto pro každou dvojici z 1 024 měst, to máme

$$\binom{1\,024}{2} = \frac{1\,024 \cdot 1\,023}{2} = 523\,776 \text{ aut.}$$

Ale máme nějaké řešení a můžeme vylepšovat.

Jak? No, do požadovaných 24 hodin nám ještě pár hodin přebývá. Takže by každé auto mohlo zastavovat ne ve dvou městech, ale třeba ve třech, nebo i víc, a tím by jedno auto zabezpečilo ne jednu, ale hned několik dvojic měst.

A kolik, to ještě bude záležet na tom, jak daleko od sebe ta města jsou, u nejbližších měst máme rezervu něco přes čtyři hodiny, u bližších dvojic (trojic, čtveřic, ...) to bude víc.

Hledáme dál...

A to byl jen jeden nápad, jak by ta auta mohla jezdit. U matematických úloh obvykle potřebujeme umět počítat, a potom mít nějaké znalosti a dokázat si vzpomenout, která znalost by nám pro danou úlohu mohla pomoci. U téhle úlohy je možná lépe vidět, že k řešení potřebujeme ještě něco – tvořivost! Zkuste si představit, zatím bez ohledu na čísla, počty a časy, kudy by ta auta (a ty dopisy) mohly jezdit. A zkuste vymyslet třeba deset různých způsobů! A pak propočítejte, jestli se to stihne a jak se to případně dá vylepšit.

Pro ilustraci uveďme ještě jeden způsob (ale určitě jich vymyslíte víc): Každý dopis bude jedním autem odvezen na centrální poštu, kde se všechna auta sejdou, vymění si dopisy a zase je rozvezou do svých, tentokrát cílových měst. A takový způsob potom můžeme upřesnit a propočítat. Kolik měst bude obsluhovat jedno auto? Bude to asi jiné u měst blízko centrální

pošty a jiné u měst na okrajích. A kolik bude celkem potřeba aut? I kdyby každé auto obsluhovalo jen jediné město, vystačili bychom s 1 024 auty, to by bylo mnohem lepší řešení než to minulé s dvojicemi měst. A protože na dopravu z centrální pošty do centrální pošty nepotřebujeme auto, tak jen 1 023. Stihne se to? To umíme spočítat. . .

Závěr

K řešení úlohy potřebujeme nejenom znalosti a schopnost počítat, ale potřebujeme také nápady, tvořivost, představivost, fantazii. Odborníci [1] říkají, že to jsou dva různé způsoby přemýšlení, a že je dobré je nemíchat a nejdříve vymyslet nápady, a pak teprve propočítávat a zlepšovat. Tak to zkuste a pokud vymyslíte nějaké řešení, ať už sami nebo s kamarádem nebo ve škole za pomoci svého učitele, spočítejte, kolik potřebujete aut, popište ho a pošlete nám ho, zveřejníme ho.

Literatura

- [1] *Osborn, A.:* Unlocking Your Creative Power, Hamilton Book, 1991.

Pes Elvis a piráti

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Budeme se zabývat úlohou, která léta setrvala v učebnicích bez větší pozornosti čtenářů a pak se z ní stal hit. Obecně ji lze zformulovat takto:

Úloha 1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABQ s přeponou AB . Na přímce $p = AQ$ volíme bod X . Bodový objekt M se po přímce p pohybuje rychlostí v a po úsečce BX rychlostí $u < v$.

Určete polohu bodu X tak, aby byl celkový čas pohybu bodu M z A do B po lomené čáře AXB minimální.