Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 257 a 258 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 257

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB protíná osa vnitřního úhlu u vrcholu B odvěsnu AC v bodě D. Nechť E je bod polopřímky CB pro který platí $|AD| = |DE|$. Dokažte, že body A, B, D, E leží na téže kružnici.

Robert Geretschläger & Jaroslav Švrček

Úloha 258

Dokažte, že pro libovolné reálné číslo x platí nerovnost

$$x^4 + 2x + 1 \geq x^2(2x + 1).$$

Pro která x nastane rovnost?

Robert Geretschläger

Dále uvádíme řešení úloh 253 a 254, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 253

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ platí

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + xf(x).$$

Pavel Calábek

Řešení. Nechť t je libovolné reálné číslo z množiny $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Substitucí $x = t$ dostaneme

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) = 1 + t\,f(t). \tag{1}$$

Dosazením
$$x = \frac{1}{1-t}$$
získáme také
$$f\left(\frac{t-1}{t}\right) = 1 + \frac{1}{1-t}\, f\left(\frac{1}{1-t}\right). \tag{2}$$
Poznamenejme, že
$$\frac{1}{1-t} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$
Konečně, položíme-li
$$x = \frac{t-1}{t} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$
obdržíme
$$f(t) = 1 + \frac{t-1}{t}\, f\left(\frac{t-1}{t}\right). \tag{3}$$
Rovnice (1), (2), (3) můžeme považovat za (lineární) soustavu rovnic s neznámými $f(t)$, $f\bigl(1/(1-t)\bigr)$ a $f\bigl((t-1)/t\bigr)$. Postupnou eliminací těchto neznámých z rovnic (1), (2), (3) tak dostaneme
$$\begin{aligned} f(t) = 1 + \frac{t-1}{t}\, f\left(\frac{t-1}{t}\right) &= \\ &= 1 + \frac{t-1}{t}\left(1 + \frac{1}{1-t}\, f\left(\frac{1}{1-t}\right)\right) = \\ &= 1 + \frac{t-1}{t}\left(1 + \frac{1}{1-t}\bigl(1 + t\, f(t)\bigr)\right) = \\ &\qquad = 2 - \frac{2}{t} - f(t), \end{aligned}$$
a tedy
$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$
pro libovolné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Zkouškou snadno ověříme, že předcházející funkce je opravdu řešením zadané rovnice.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Úloha 254

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovující rovnici

$$x^2 + xy + y^2 = x + y + 5.$$

Jacek Uryga

Řešení. Rovnici upravíme na tvar

$$\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{64}{12},$$

tedy po vynásobení dvanácti dostaneme ekvivalentní tvar

$$3(2x + y - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 64.$$

Čísla v obou závorkách jsou dle předpokladů celá čísla. Navíc číslo 64 lze zapsat jako součet trojnásobku druhé mocniny celého nezáporného čísla a druhé mocniny celého nezáporného čísla pouze následujícími dvěma způsoby

$$64 = 3 \cdot 0^2 + 8^2 = 3 \cdot 4^2 + 4^2.$$

Protože navíc číslo $3y - 1$ dává při dělení 3 zbytek 2, dostáváme pro čísla v závorkách následující možnosti, které zároveň vyřešíme:

$2x + y - 1$	0	-4	4
$3y - 1$	8	-4	-4
x	-1	-1	3
y	3	-1	-1

Vidíme odtud, že existují právě tři hledané dvojice celých čísel

$$(x; y) \in \{(-1; -1), (-1; 3), (3; -1)\}.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Pavel Calábek