Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice

TOMÁŠ RIEMEL – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Polynomicko-exponenciálními diofantovskými rovnicemi rozumíme takové diofantovské rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají zpravidla charakter proměnných daného polynomu s celočíselnými koeficienty a exponentů dané exponenciální funkce se základem a, kterým je přirozené číslo větší než 1. V tomto příspěvku se zaměříme zejména na *metodu faktorizace* (daného polynomu), která se s výhodou používá při řešení nejjednodušších rovnic uvedeného typu, tj. rovnic s celočíselnými neznámými x, y ve tvaru

$$P(x) = a^y,$$

kde $P(x)$ je daný polynom s celočíselnými koeficienty a a je přirozené číslo větší než 1.

Příklad 1

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$x^2 = 2^y.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak i dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Dále si uvědomme, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně rovnice nabývá výhradně nezáporných celočíselných hodnot. Snadno se konečně vidí, že $x = 2^k$, kde k je *vhodné* celé nezáporné číslo. Platí tudíž

$$x^2 = (2^k)^2 = 2^{2k} = 2^y,$$

a tedy $y = 2k$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že všechny dvojice $(x, y) = (2^k, 2k)$, kde k je *libovolné* celé nezáporné číslo (jedná se o tzv. jednoparametrický systém řešení), vyhovují dané rovnici.

Závěr. Řešením dané úlohy jsou všechny dvojice celých čísel ve tvaru

$$(x, y) = (\pm 2^k, 2k),$$

kde k je libovolné celé nezáporné číslo.

Příklad 2

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3x^2 = 2^{y+4} - 2^{y+2}.$$

Řešení: Ze zadání je patrné (podobně jako v příkladu 1), že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak také dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Vytknutím 2^{y+2} na pravé straně rovnice a následnou úpravou dostaneme bezprostředně

$$x^2 = 2^{y+2}.$$

Zavedením substituce $z = y + 2$ dostáváme analogickou rovnici jako v předešlé úloze. S ohledem na její řešení a vzhledem k použité substituci $(y = z - 2)$ jsou řešením dané rovnice všechny dvojice $(x, y) = (\pm 2^k, 2k - 2)$, kde k je celé nezáporné číslo. Po záměně parametru k za $k + 1$ dojdeme k následujícímu závěru: $(x, y) = (\pm 2^{k+1}, 2k)$, kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1.

Závěr. Řešením dané úlohy jsou všechny dvojice

$$(x, y) = (\pm 2^{k+1}, 2k),$$

kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1.

Při řešení následujících úloh bude uplatněna metoda faktorizace daného polynomu $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, která byla zmíněna v úvodním odstavci článku.

Příklad 3

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Řešení: Podobně jako v první úloze vidíme, že x a y jsou celá nezáporná čísla, neboť výraz na levé straně rovnice musí nabývat nezáporných celočíselných hodnot. Levou stranu rovnice lze přepsat do součinového (faktorizovaného) tvaru $(1+x)(1+x^2)$. Danou rovnici přepíšeme ve tvaru

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y = 2^m \cdot 2^n,$$

kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m+n=y$, $m \leq n$. Zřejmě platí

$$0 < 1+x \leq 1+x^2,$$

tudíž $1+x = 2^m$, $1+x^2 = 2^n$, a proto hodnota $1+x$ musí dělit hodnotu $1+x^2$. Přitom platí

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{(x^2-1)+2}{x+1} = x-1+\frac{2}{x+1}.$$

Odtud plyne, že zlomek $2/(x+1)$ musí nutně nabývat celočíselné hodnoty. Přípustnými hodnotami x jsou pak čísla z množiny $\{-3,-2,0,1\}$. Postupným dosazením za x do rovnic $1+x=2^m$, $1+x^2=2^n$ získáme dvě řešení $(m,n)=(0,0)$ pro $x=0$ a $(m,n)=(1,1)$ pro $x=1$.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x,y) \in \{(0,0),(1,2)\}$.

Podobně lze řešit i následující úlohu.

Příklad 4

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = 2^y.$$

Řešení: Danou rovnici postupně upravíme do tvaru

$$\begin{gathered}(1+x+x^2+x^3)+(x^4+x^5+x^6+x^7) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = \\ = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y.\end{gathered}$$

Uvědomme si, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně je celé číslo. Platí tedy $0 < 1+x \leq 1+x^2 \leq 1+x^4$ a daná rovnice přejde do tvaru

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y = 2^p \cdot 2^q \cdot 2^r.$$

Odtud $1+x = 2^p$, $1+x^2 = 2^q$ a $1+x^4 = 2^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla, $p \leq q \leq r$ a $p+q+r=y$. Proto číslo $1+x^2$ musí být dělitelné číslem $1 + x$ (dále číslo $1 + x^4$ musí být dělitelné číslem $1 + x$ a rovněž číslem $1 + x^2$). Tedy, opět jako v předchozím příkladě, uvažujeme podíl $(x^2+1) : (x+1)$, který nabývá celočíselných hodnot x pouze pro čísla z množiny $\{-3, -2, 0, 1\}$. Postupným dosazením těchto hodnot x do rovnic $1 + x = 2^p$, $1 + x^2 = 2^q$, $1 + x^4 = 2^r$ získáme dvě řešení $(p, q, r) = (0, 0, 0)$ pro $x = 0$ a $(p, q, r) = (1, 1, 1)$ pro $x = 1$.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 3)\}$.

Příklad 5 (XVIII. Matematický duel, 2010)

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel splňující rovnici

$$9^a = b^2 + 17.$$

Řešení: Danou rovnici postupně přepíšeme do tvaru

$$9^a - b^2 = 3^{2a} - b^2 = (3^a)^2 - b^2 = (3^a - b)(3^a + b) = 17.$$

Protože $3^a + b > 0$, musí být i $3^a - b > 0$. S ohledem na nerovnost $3^a - b < 3^a + b$ platí

$$3^a - b = 1, \tag{1}$$
$$3^a + b = 17. \tag{2}$$

Odečtením (1) od (2) dostáváme bezprostředně $b = 8$ a následně $a = 2$.

Závěr. Úloha má tedy jediné řešení $(a, b) = (2, 8)$.

Příklad 6 (VI. Matematický duel, 1998)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^3 + 14x^2 - 51x = 10^y.$$

Řešení: Rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$x(x + 17)(x - 3) = 2^y \cdot 5^y.$$

Stejně jako v příkladu 3 snadno vidíme, že x a y jsou celá nezáporná čísla. Hodnota $(x + 17)(x - 3)$ má jinou paritu než x. Musí tudíž nastat právě jedna z možností:

(i) $x = 5^m$, kde m je celé číslo, $m \le y$

(ii) $(x + 17)(x - 3) = 5^n$, kde n je celé číslo, $n \le y$

ad (i) Pokud $x = 5^m$, pak čísla $x+17 = 5^m+17$ a $x-3 = 5^m-3$ nejsou dělitelná 5. Musí tedy platit $(x+17)(x-3) = 2^y$ a současně $x = 5^y$. Pro každé celé číslo x navíc platí $x+17 > x-3$, nutně tedy musí být číslo $x+17$ dělitelné číslem $x-3$. Platí tak

$$\frac{x+17}{x-3} = \frac{(x-3)+20}{x-3} = 1 + \frac{20}{x-3}.$$

Číslo x může proto nabývat celočíselných hodnot pouze pro čísla z množiny $\{-17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23\}$. Současně musí být x mocninou čísla 5. Vyhovují tedy pouze čísla 1 a 5. Dosazením $x = 1$ a $x = 5$ do vztahu $(x+17)(x-3) = 2^y$ však nedostaneme žádné vyhovující celé číslo y.

ad (ii) Podobně jako v případu (i) zjistíme, že x může nabývat pouze hodnot z množiny $\{-17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23\}$. Jelikož 5 je prvočíslo, výrazy $x+17$ a $x-3$ musí být mocninami čísla 5. Uvedeným podmínkám vyhovuje pouze jedno číslo x, tj. $x = 8$ a jemu odpovídá $y = 3$. (Zkouška byla provedena, podobně jako v předešlých příkladech, postupným dosazováním.)

Závěr. Jediným řešením dané úlohy je dvojice $(x, y) = (8, 3)$.

Na závěr uvádíme ryze exponenciální diofantovskou rovnici, v níž figurují celočíselné neznámé výhradně v exponentech dvou mocnin o různých základech.

Příklad 7

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3^n = 2^m + 5.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že exponenty m, n v dané rovnici jsou celá nezáporná čísla. Dále rovnici přepíšeme do tvaru

$$3^n - 1 = 2^m + 4. \tag{3}$$

Odtud vidíme, že $3^n > 5$, tj. $n \geq 2$. Platí tudíž

$$2^m + 4 = 3^n - 1 \geq 3^2 - 1 = 8,$$

tedy $2^m \geq 4$, tj. $m \geq 2$.

Protože $3^n - 1 = (3-1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1)$, rovnici (3) následně upravíme do tvaru

$$2\,(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1) = 2^m + 4 = 2^2(2^{m-2} + 1),$$

tudíž $2 \mid (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1)$ a n musí tedy být sudé číslo ($n = 2k$, kde k je přirozené číslo). Rovnici (3) nyní přepíšeme do tvaru

$$3^{2k} - 1 = 2^m + 4 = 2^2(2^{m-2} + 1)$$

a upravíme

$$3^{2k} - 1 = (3^2 - 1)\left((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1\right) = 4(2^{m-2} + 1).$$

Po snadné úpravě získáme rovnici

$$2\left((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \ldots + 3^2 + 1\right) = 2^{m-2} + 1, \tag{4}$$

z níž plyne, že levá strana rovnice (4) je dělitelná dvěma. Totéž musí splňovat i pravá strana. To však nastane, právě když $m = 2$, a tedy $n = 2$.

Závěr. Úloha má jediné řešení, a to $(m, n) = (2, 2)$.

K procvičení této problematiky uvádíme trojici neřešených úloh, které navazují na řešení předcházejících úloh; lze je řešit užitím metody faktorizace.

Příklad 8

V oboru celých čísel řešte rovnici $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 2^y$.

[*Řešení*: $(x, y) = (0, 0)$.]

Příklad 9

Řešte rovnici $n^3 + 8 = 2^m$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Návod: Danou rovnici přepíšeme do tvaru $(n + 2)(n^2 - 2n + 4) = 2^m$ a dále ji lze řešit podobně jako příklad 4.

[*Řešení*: $(m, n) \in \{(3, 0), (4, 2)\}$.]

Příklad 10 [KöMaL, Vol 69/5, 2019, C. 1546]

Řešte rovnici $x^2 - 18x + 80 = 2^y$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Návod: Rovnici lze přepsat do tvaru $(x - 8)(x - 10) = 2^y$ a dále řešit podobně jako příklad 3.

[*Řešení*: $(x, y) \in \{(6, 3), (12, 3)\}$.]