Úlohy diskrétní pravděpodobnosti

JAKUB STANĚK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Pravděpodobnost bývá často žáky i učiteli považována za nejobtížnější látku středoškolské matematiky a jako taková bývá i nejméně oblíbená. Důvodů k tomuto hodnocení může být více. Jedna z příčin obtížnosti této látky je fakt, že úlohy jsou většinou zadávány slovně, lze tedy snadno udělat chybu v interpretaci úlohy a proto mohou tyto úlohy potrápit jak nadané žáky, tak i učitele. O tom, že pravděpodobnost nadělala problémy i slavným matematikům, se můžeme dočíst třeba v knize [1, s. 12], kde je uvedena snadná úloha o házení mincí: Jaká je pravděpodobnost, že ve dvou hodech mincí padne alespoň jednou rub? Tu chybně vyřešil jak *G. W. Leibniz* (1646–1716), tak *d'Alembert* (1717–1783). Přitom o něco složitější verze této úlohy je použita v učebnici [2, s. 81] jako první úloha v kapitole věnované pravděpodobnosti. Proto je asi vhodnější přistupovat k pravděpodobnostním úlohám s vědomím, že chybovat při jejich řešení je přirozené, a tuto zkušenost předat i studentům.

S problémem správné interpretace úlohy, či představy o ní, souvisí i problém s nalezením a vysvětlením chyby v nesprávném řešení pravděpodobnostních úloh. To může být někdy velmi obtížné, a je tak snadné sklouznout k tomu, že ukážeme pouze správné řešení a všechna ostatní řešení označíme za špatná, protože vedou k jinému výsledku, aniž by bylo vysvětleno, v čem přesně jsou uvedená řešení chybná. Tuto argumentaci lze najít např. v [2] na straně 122 v příkladu 2. Zde je uvedena nejdříve chybná úvaha, a pak je řečeno: „Tato úvaha je chybná, jak nám ukáže následující správné řešení.“ Je však otázka, zda tento argument hloubavého studenta uspokojí. Neřekne si třeba, že by mohlo být uvedené řešení chybné, jak mu ukazuje původní úvaha? Proto by učitelé neměli rezignovat na snahu vysvětlit studentům, kde chyba v nesprávném řešení úloh přesně je.

Ve snaze zabránit nejasnostem v interpretaci zadání úlohy či ve snaze sjednotit způsob řešení úlohy jsou také někdy v zadání uváděna nadbytečná fakta, např. rozlišitelnost či nerozlišitelnost mincí či kostek u úloh, kdy tento fakt nehraje žádnou roli. To může vést k situacím, kdy student později nad zadáním jiné úlohy dlouze přemýšlí, zda jde v dané situaci o rozlišitelné či nerozlišitelné předměty, nemůže se rozhodnout a je zmaten. Přitom je problém způsoben tím, že to v zadané úloze není podstatné a student si toho není vědom.

Jednou z možností, jak studentům pomoci hlouběji proniknout do tajů pravděpodobnosti, je ukazování více řešení jedné úlohy, srovnávání těchto řešení, porovnávání více úloh a zapojení grafických řešení pravděpodobnostních úloh. Zvláště grafická řešení některým studentům pomáhají v porozumění dané úloze nejvíc. Je tedy škoda, že se v našich učebnicích grafická řešení prakticky nevyskytují, zatímco v zahraničních učebnicích se objevují, viz např. [6].

V následující části článku se zaměříme na tři konkrétní úlohy, ukážeme si více způsobů jejich řešení a provedeme i stručná porovnání těchto řešení. Rovněž si ukážeme podobnost mezi první a druhou úlohou, která není na první pohled zřejmá. U těchto úloh uvedeme i možné chybné úvahy při jejich řešení a ukážeme si, proč jsou tyto úvahy chybné. Poslední úloha je koncipovaná tak, aby vedla k odvození Bayesova vzorce, tj. aby ji bylo možné vyřešit, i když Bayesův vzorec není v hodině probírán. Podobné hrátky s úlohami totiž mohou vést k větší oblibě pravděpodobnosti u studentů a v důsledku toho i k lepšímu pochopení této oblasti matematiky.

Příklady

První příklad, kterým se budeme zabývat, se proslavil jako tzv. *problém Montyho Halla*, jeho zadání bylo publikováno v [5, s. 67], a lze se s ním setkat v různých modifikacích poměrně často.

Příklad 1

V televizní soutěži jsou tři zavřené trezory. V jednom z nich je skryta výhra a zbylé dva jsou prázdné. Moderátor vyzve soutěžícího, aby si vybral jeden trezor, o němž si myslí, že je v něm ukryta výhra. Po volbě trezoru je jeden ze zbývajících trezorů otevřen, přičemž je ale vždy otevřen pouze takový trezor, ve kterém výhra není (o čemž je soutěžící předem informován). Poté je soutěžící tázán, zda chce změnit svou volbu a vybrat si druhý neotevřený trezor. V případě, že soutěžící vybere trezor s výhrou, tuto výhru získá. Je pro soutěžícího změna výběru trezoru výhodná?

Řešení: Nejdříve si ukažme dvě úvahy, které se při řešení této úlohy často objevují a které vedou k různým výsledkům.

(i) První úvaha vychází z faktu, že na počátku byla pravděpodobnost, že je výhra v konkrétním trezoru, stejná pro všechny trezory. Jelikož jsme výhru nemohli přesunout, tak by měla být pravděpodobnost stejná pro oba zavřené trezory i po otevření prázdného trezoru. Proto by pravděpodobnost, že výhra je v původně zvoleném trezoru, měla být $\frac{1}{2}$, nemá tedy smysl měnit svoji volbu.

(ii) Druhá úvaha vychází z faktu, že na počátku máme tři zavřené trezory a v každém může být výhra se stejnou pravděpodobností, tudíž pravděpodobnost, že výhra je v námi zvoleném trezoru, je $\frac{1}{3}$. Po volbě trezoru s výhrou se výhra nemůže přesunout, a tak by se ani tato pravděpodobnost neměla změnit. Takže po otevření prázdného trezoru by měla být pravděpodobnost, že výhra je v námi zvoleném trezoru, stále $\frac{1}{3}$. Tudíž pravděpodobnost, že výhra bude ve zbývajícím trezoru, by měla být $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. A proto je výhodné změnit původní volbu trezoru.

Ukažme si nejdříve matematické řešení tohoto příkladu, a pak se teprve vrátíme k oběma předchozím úvahám.

Označme A_i, $i = 1, 2, 3$, jev, že v i-tém trezoru je ukryta výhra, pak $P(A_i) = \frac{1}{3}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsme na začátku zvolili trezor číslo 1, a označme B_j $(j = 2, 3)$ jev, že byl po naší volbě otevřen j-tý trezor (který je prázdný). Rozeberme nyní všechny možnosti:

1. Je-li výhra v prvním trezoru (nastal jev A_1), může být otevřen libovolný ze zbývajících dvou trezorů. Jelikož zde není žádná preference otevření trezoru č. 2 ani 3, tak pravděpodobnost otevření obou trezorů je stejná, tedy $P(B_j|A_1) = \frac{1}{2}$ pro $j = 2, 3$.

2. Je-li výhra v druhém trezoru (nastal jev A_2), může být otevřen pouze třetí trezor, tedy $P(B_2|A_2) = 0$ a $P(B_3|A_2) = 1$. Obdobně dostaneme $P(B_3|A_3) = 0$ a $P(B_2|A_3) = 1$.

Ze vzorce

$$P(B_j|A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}$$

dostaneme $P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i)$, tedy

$$P(A_1 \cap B_j) = P(B_j|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \text{pro } j = 2, 3,$$
$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i) = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad \text{pro } i = j = 2, 3,$$
$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{pro } i, j = 2, 3,\ i \neq j.$$

Jelikož jsou jevy A_1, A_2 a A_3 disjunktní a dohromady pokrývají celý pravděpodobnostní prostor (jsou v nich obsaženy všechny možné výsledky pokusu), tak

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad j = 2, 3.$$

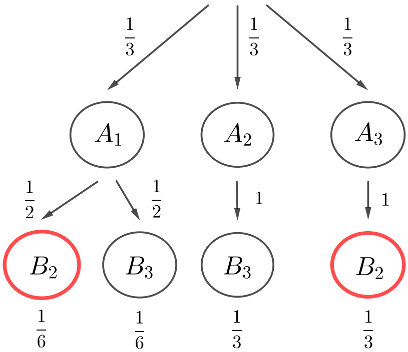
Proto

$$P(A_1|B_j) = \frac{P(A_1 \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad \text{pro } j = 2, 3,$$
$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \text{pro } i, j = 2, 3,\ i \neq j.$$

Tedy po otevření prázdného trezoru zůstane pravděpodobnost, že se výhra nachází v prvním trezoru, stejná, zatímco pro zbývající trezor je dvojnásobná. Proto je výhodné změnit svoji volbu.

Nyní se zaměřme na to, co bylo špatně v první úvaze, která nevedla ke správnému výsledku. V ní vycházíme ze stejné pravděpodobnosti uložení výhry pro všechny trezory, která by se neměla otevřením jednoho trezoru měnit. Proč je tedy po otevření např. druhého trezoru šance, že je výhra ve třetím trezoru, větší než v námi zvoleném prvním trezoru? Uvědomme si, že námi vybraný trezor být otevřen nemohl bez ohledu na to, zda v něm výhra je, či není. Zatímco třetí trezor být otevřen mohl, ale pouze v případě, že v něm výhra není. Proto když otevřen nebyl, tak je pro nás tato informace vzhledem k uložení výhry relevantní. V jistém smyslu třetí trezor po otevření druhého trezoru reprezentuje oba tyto trezory. Lze si to představit i tak, že druhý a třetí trezor tvoří jeden dvojtrezor se dvěma dveřmi, kde jedny z nich vždy otevřeme, a když otevřeme ty druhé, tak se můžeme dostat ke společné výhře.

Podívejme se na grafický způsob řešení této úlohy (obr. 1), který je pro některé studenty názornější. Zde používáme stejné značení jako v předchozím řešení. Na obr. 1 je znázorněna nejdříve pravděpodobnost uložení výhry do jednotlivých trezorů (horní řada šipek) a po volbě prvního trezoru dále pravděpodobnost otevření druhého či třetího trezoru (spodní řada šipek). Byl-li otevřen např. druhý trezor, nastal jeden z jevů $A_1 \cap B_2$ a $A_3 \cap B_2$ (na obr. 1 jsou tyto jevy zvýrazněny červeně). Jelikož pravděpodobnost jevu $A_1 \cap B_2$ je $P(A_1 \cap B_2) = \frac{1}{6}$, zatímco pravděpodobnost jevu $A_3 \cap B_2$ je $P(A_3 \cap B_2) = \frac{1}{3}$, je dvakrát větší šance, že bude výhra ve třetím trezoru, a proto je výhodné změnit naši volbu na třetí trezor. Obdobně postupujeme, je-li otevřen třetí trezor.



Obr. 1 Grafické řešení prvního příkladu

Nyní se podíváme na druhou úlohu, uvedenou v [2, s. 122, př. 2].

Příklad 2

Skříňka má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé jedna zlatá a jedna stříbrná a ve třetí 2 stříbrné mince. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v této zásuvce zbude zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Řešení: I při řešení této úlohy můžeme často narazit na následující dvě úvahy, které vedou k různým výsledkům.

1. úvaha: Jelikož jsme vytáhli stříbrnou minci, museli jsme tahat z druhé nebo ze třetí přihrádky. Ve druhé zůstala zlatá mince, ve třetí stříbrná, a proto by měla být hledaná pravděpodobnost $\frac{1}{2}$.

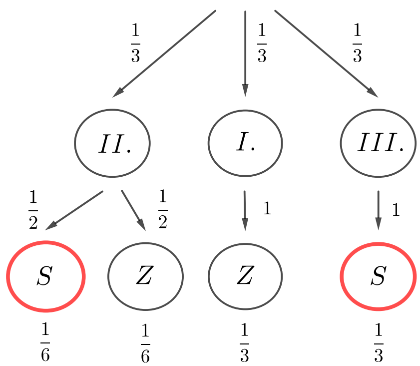
2. úvaha: Jelikož jsme vytáhli stříbrnou minci, tak jsme museli tahat z druhé nebo ze třetí přihrádky. V těchto dvou přihrádkách byly tři stříbrné a jedna zlatá mince. Po vytažení stříbrné mince nám zůstaly dvě stříbrné a jedna zlatá, proto je hledaná pravděpodobnost $\frac{1}{3}$.

Nejdříve si ukážeme řešení, které je uvedeno v [2, s. 122, př. 2]. Pro řešení příkladu si zavedeme následující značení: (I, z_1) je jev, že z první zásuvky vytáhneme první zlatou minci, podobně označíme další elementární jevy (I, z_2), (II, z), (II, s), (III, s_1) a (III, s_2), kde první číslo vždy značí, ze které zásuvky bylo taženo, a s, resp. z, značí tažení stříbrné, resp. zlaté mince. Označíme-li jev „byla tažena stříbrná mince“ písmenem S a jev „v zásuvce zbyla zlatá mince“ římskou číslicí II (neboť zlatá mince zbude jen v případě, že jsme zvolili druhou zásuvku), pak

$$P(II|S) = \frac{P(S \cap II)}{P(S)} = \frac{P(\{(II, s)\})}{P(\{(II, s), (III, s_1), (III, s_2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Chyba v první úvaze, která vedla ke špatnému řešení, byla opomenutí skutečnosti, že pravděpodobnost, že vytáhneme stříbrnou minci z druhé zásuvky, je dvakrát menší než pravděpodobnost, že ji vytáhneme z poslední zásuvky. Víme-li tedy, že jsme vytáhli stříbrnou minci, je dvakrát větší pravděpodobnost, že jsme ji tahali ze třetí zásuvky než ze zásuvky druhé.

Ukažme si grafické řešení této úlohy (obr. 2):



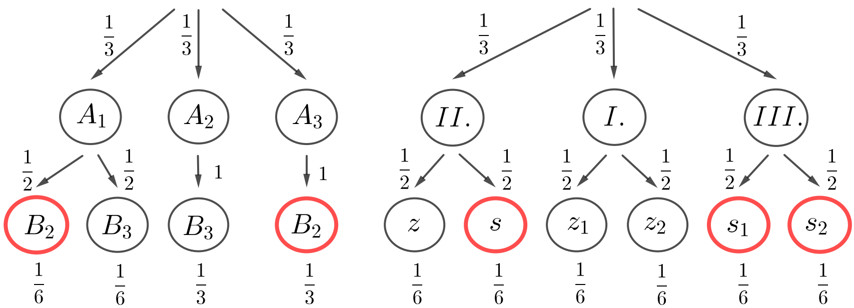
Obr. 2 Grafické řešení druhého příkladu

Zde označíme I, II, resp. III jevy, že byla zvolena první, druhá, resp. třetí zásuvka, S jev „byla tažena stříbrná mince“ a Z jev „byla tažena zlatá mince“. První řádek šipek představuje volbu zásuvky a druhý znázorňuje, jakou minci jsme vytáhli. Červeně je zvýrazněn jev, že byla tažena stříbrná mince. Jelikož je pravděpodobnost jevu $II \cap S$ rovna $\frac{1}{6}$, zatímco pravděpodobnost jevu $III \cap S$ je $P(III \cap S) = \frac{1}{3}$, je dvakrát pravděpodobnější, že jsme zvolili třetí zásuvku. V ní je ale stříbrná mince, proto je pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, rovna

$$\frac{P(II \cap S)}{P(S)} = \frac{P(II \cap S)}{P(II \cap S) + P(III \cap S)} = \frac{1}{3}.$$

Porovnání příkladu 1 a příkladu 2

Podíváme-li se pozorně na obrázky 1 a 2, vidíme, že jsou si velmi podobné. Přesněji liší se pouze v označení jevů. Jevy A_1, A_2 a A_3 postupně odpovídají jevům II, I a III a jevy B_2 a B_3 odpovídají jevům S a Z. Lze tedy říci, že z jistého úhlu pohledu jde o dvě verze stejné úlohy. Přesto se často stává, že student vyřeší jeden z těchto příkladů dobře a druhý špatně. Lze tedy řešit první příklad stejně jako příklad druhý a naopak? Zatímco početní způsob řešení prvního příkladu lze aplikovat i na druhý příklad (stačí jen prohodit značení jevů tak, jak již bylo uvedeno), tak uvedené početní řešení druhého příkladu na první příklad aplikovat tak snadno nelze. Důvodem je, že při početním řešení jsme ještě rozlišovali, zda vytáhneme z první zásuvky první či druhou zlatou minci a podobně jsme pracovali i se třetí zásuvkou, v rámci tohoto řešení jsme tedy mince v zásuvkách rozlišovali. Těžko bychom však hledali podobnou interpretaci v první úloze. Tyto rozdíly jsou graficky znázorněny na obr. 3.



Obr. 3 Grafické porovnání řešení první a druhé úlohy

Poslední úloha, kterou si uvedeme, je klasická úloha na použití Bayesovy věty, viz např. [1, s. 29]. Ačkoliv se Bayesova věta na mnohých středních školách neučí, dokonce ani v některých učebnicích není uvedena, viz např. [2], jde jen o přímé aplikování podmíněné pravděpodobnosti, která už do klasické látky středních škol patří, např. v učebnicích [3, s. 51] a [4, s. 137] Bayesova věta zmíněna je. Proto je zvoleno zadání následující úlohy tak, aby postupně k Bayesově větě vedlo.

Příklad 3

Uvažujme nemoc, kterou trpí jedno procento populace, a lékařský test, který v 99 % případů odhalí nemoc u nemocného jedince, ale v 5 % případů označí za nemocného i zdravého jedince.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný testovaný jedinec je nemocný a zároveň je označen testem jako nemocný?
b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má pozitivní test (je testem označen za nemocného)?
c) Má-li jedinec pozitivní test, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně nemocný?

Pozn.: Velmi často je však v úloze tohoto typu položena pouze poslední otázka c).

Řešení: Zavedeme si následující značení:

- Z ... jedinec je zdravý,
- Z^c ... jedinec je nemocný,
- N ... test vyšel negativní (jedinec je testem označen jako zdravý),
- N^c ... test vyšel pozitivní (jedinec je testem označen jako nemocný).

Ze zadání známe následující pravděpodobnosti:

- $P(Z) = 0{,}99$,
- $P(Z^c) = 1 - P(Z) = 0{,}01$,
- $P(N^c|Z^c) = 0{,}99$,
- $P(N^c|Z) = 0{,}05$.

a) Ze vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost

$$P(N^c|Z^c) = \frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(Z^c)}$$

dostaneme

$$P(N^c \cap Z^c) = P(N^c|Z^c)P(Z^c) = 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0099.$$

b) Rozdělíme si jev N^c na dva disjunktní podjevy $N^c \cap Z^c$ a $N^c \cap Z$. Pravděpodobnost prvního jevu máme již vypočítanou v předchozím bodu, pravděpodobnost druhého lze vypočítat obdobným způsobem, tedy

$$P(N^c \cap Z) = P(N^c|Z)P(Z) = 0{,}05 \cdot 0{,}99 = 0{,}0495.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má pozitivní test, je

$$P(N^c) = P(N^c \cap Z^c) + P(N^c \cap Z) = 0{,}0099 + 0{,}0495 = 0{,}0594.$$

c) Má-li jedinec pozitivní test, pak pravděpodobnost, že je skutečně nemocný, je

$$P(Z^c|N^c) = \frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(N^c)} = \frac{0{,}0099}{0{,}0594} = \frac{1}{6}.$$

Poznamenejme, že při dosazení výrazů z bodů a) a b) do výrazu v bodě c) dostaneme Bayesův vzorec

$$P(Z^c|N^c) = \frac{P(N^c|Z^c)P(Z^c)}{P(N^c|Z^c)P(Z^c) + P(N^c|Z)P(Z)}.$$

Podobně jako předchozí úlohy se i tato dá řešit graficky a toto řešení je mnohdy pro studenty názornější.

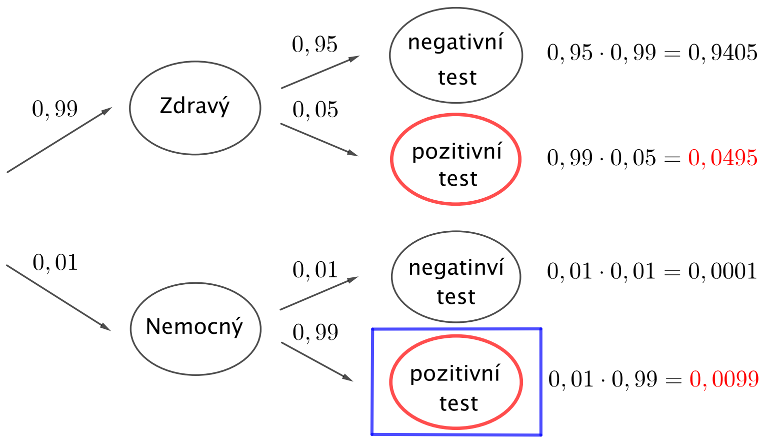
a) Odpověď na první otázku vyčteme přímo z obr. 4 (poslední řádek, jev vyznačený modrým obdélníkem), tedy hledaná pravděpodobnost je 0,0099.

b) Pravděpodobnost, že je jedinec označen testem jako nemocný, dostaneme součtem pravděpodobností jevů, které jsou na obrázku zvýrazněny červeně. Tedy

$$P(N^c) = 0{,}0099 + 0{,}0495 = 0{,}0594.$$

c) Je-li jedinec označený jako nemocný, nastal jev, který je v obrázku zvýrazněn červeně. Podjev, kdy je jedinec navíc skutečně nemocný, je označen modrým obdélníkem. Hledaná pravděpodobnost je tedy podílem pravděpodobnosti modře vyznačeného jevu a pravděpodobnosti červeně vyznačeného jevu, tedy

$$\frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(N^c)} = \frac{0{,}0099}{0{,}0594} = \frac{1}{6}.$$

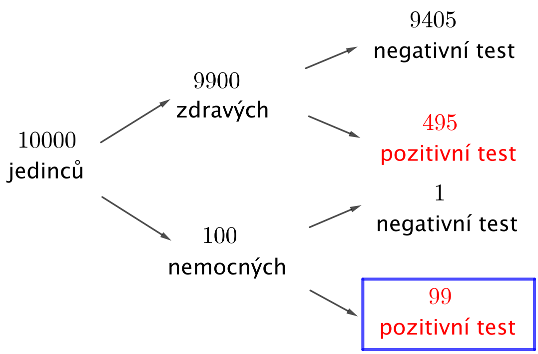


Obr. 4 Grafické řešení příkladu 3

Poznamenejme, že pokud řešíme všechny otázky a), b) i c), pak odpověď na poslední otázku je již jednoduchá a grafické i početní řešení se moc neliší. Pokud ale dostaneme pouze otázku c) (což je častý případ), pak je grafické řešení rychlejší a přehlednější. Navíc nám umožňuje rychle odpovídat i na další případné otázky, zatímco u početního řešení tomu tak být nemusí. např. chceme-li znát pravděpodobnost, že jedinec označený testem jako zdravý je skutečně zdravý, tak z obr. 4 lehce vyčteme výsledek $0{,}9405 : (0{,}9405 + 0{,}0001) = 0{,}9998937$.

Ukažme si ještě jedno grafické znázornění tohoto příkladu (obr. 5), které je sice velmi podobné obr. 4, ale pracuje s počty jedinců, a ne s pravděpodobnostmi, proto je pro některé studenty ještě názornější. Budeme uvažovat dostatečný počet jedinců (v našem případě 10 000), které budeme postupně rozdělovat do podskupin tak, aby toto rozdělení odpovídalo procentům uvedeným v zadání úlohy. Máme-li tedy 10 000 jedinců, z nichž 1 %

je nemocných, máme 100 nemocných jedinců z celkového počtu 10 000. Jelikož nemocných jedinců s pozitivním testem je 99 z celkového počtu 10 000 jedinců, pak hledaná pravděpodobnost z bodu a) je $99 : 10\,000 = 0{,}0099$. Obdobně dostaneme odpověď na otázky b) a c). U otázky c) si je však třeba uvědomit, že hledáme podmíněnou pravděpodobnost, takže nebudeme počet 99 nemocných jedinců s pozitivním testem dělit celkovým počtem jedinců, ale pouze počtem všech jedinců, kteří měli pozitivní test, tedy číslem $99 + 495 = 594$, takže hledaná pravděpodobnost je $99 : 594$.



Obr. 5 Grafické řešení příkladu 3 s počty jedinců (barevné označení odpovídá obr. 4)

Literatura

[1] *Anděl, J.*: Matematika náhody. Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] *Calda, E., Dupač, V.*: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, Praha, 2013.

[3] *Horenský R., Janů, I., Květoňová, M., Lukšová, H., Vémolová, R.*: Matematika pro střední školy – 8. díl: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika – Učebnice. Didaktis, Brno, 2015.

[4] *Robová, J., Hála, M., Calda, E.*: Matemmatika pro střední školy – Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, Praha, 2013.

[5] *Selvin, S. et al.*: Letter to the Editos. The American Statistician, roč. 29 (1975), č. 1, s. 67–71.

[6] *Strid, V., Tobin, P.*: Mathematical Studies, Standard level. 3rd Edition, 2nd Imprint, Australia, 2005.