Přibližná trisekce úhlu užitím geometrické posloupnosti

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Nový Bydžov

Trisekce úhlu společně s duplikací (zdvojením) krychle a kvadraturou kruhu patří mezi tři úlohy starověku zformulované už v 5. století př. n. l., známé jako tři klasické problémy antické matematiky. Tento článek se zabývá přibližnou konstrukcí trisekce úhlu, jejíž nepřesnost činí přibližně 0,1 %. Jednoduchá konstrukce používá pouze pravítka a kružítka, a je proveditelná v malém počtu kroků. Metoda současně využívá vlastnosti konečného součtu nekonečné geometrické řady.

Že trisekci úhlu nelze provést pouze za použití pravítka a kružítka, dokázal francouzský matematik *Évariste Galois* (1811–1832) až v roce 1830 [1]. Jednoduchý algebraický důkaz nemožnosti rozdělit úhel na třetiny založený na řešení kubické rovnice je uveden např. v [2].

Přibližných metod, jak rozdělit úhel na třetiny, je nespočet. Z těch zajímavějších připomeňme např. trisekci úhlu s využitím origami [3], konstrukci s tětivami nebo Kochańského konstrukci rektifikace kružnice [4]. Několik dalších metod je uvedeno v [5].

Pravidla konstrukcí pomocí pravítka a kružítka

Jak uvádí [2], jsou formulována čtyři základní pravidla pro eukleidovské konstrukce. Za prvé, pravítko bez jakýchkoliv značek slouží ke konstrukci přímky procházející dvěma již zkonstruovanými body. Za druhé, kružítkem lze sestrojit pouze oblouk kružnice se středem v již zkonstruovaném bodě a poloměrem, který je roven vzdálenosti dvou známých bodů. Za třetí, konstrukce musí být provedena konečným počtem kroků. Za čtvrté, konstrukce musí být přesná.

Součet nekonečné geometrické řady

Pro součet nekonečné geometrické řady platí známý vztah

$$s = \frac{a_1}{1-q}, \tag{1}$$

kde a_1 je první člen a q je kvocient geometrické posloupnosti, pro který platí $|q| < 1$.

Jak uvádí Švecová [5, s. 45], uvažujeme-li řadu danou vztahem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \tag{2}$$

její součet je roven $1/3$. Tato řada však konverguje velmi pomalu, a pro konstrukční účely za pomocí pravítka a kružítka je vzhledem k měnícímu se znaménku nevhodná.

Uvažujme nyní geometrickou posloupnost, jejíž první člen $a_1 = 1/4$ a kvocient $q = 1/4$. Součet nekonečné geometrické řady této posloupnosti je

$$s = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3},$$

přičemž platí vztah

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3} \tag{3}$$

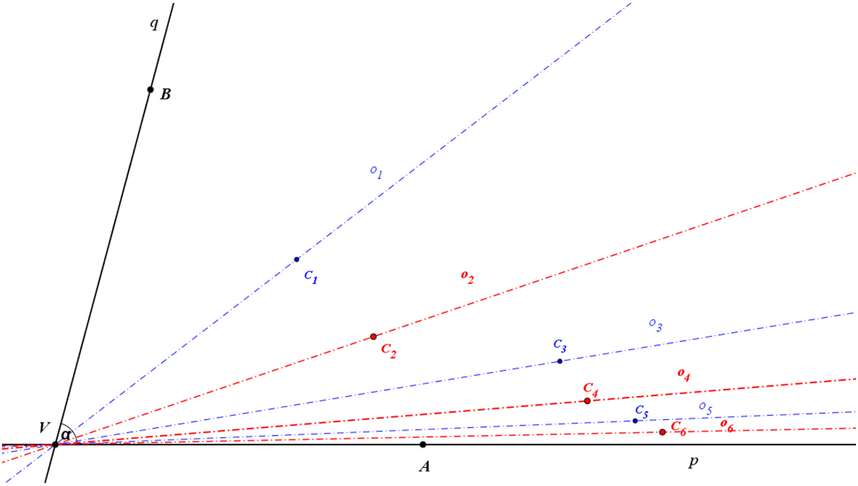
Přibližná konstrukce s využitím geometrické posloupnosti

Konstrukce provedená pomocí programu GeoGebra spočívá v opakovaném půlení zadaného úhlu α (obr. 1). Úhel $\alpha = |\sphericalangle AVB| = 75^\circ$ byl zvolen naprosto libovolně, přičemž $A \in p$, $B \in q$, $V \in p \cap q$. Pomocí kružítka byla sestrojena osa o_1 tohoto úhlu a na ní vyznačen bod C_1. V dalším kroku byla zkonstruována osa o_2 úhlu AVC_1 a vyznačen bod C_2. Uvedený postup opakujeme tak dlouho, až získáme úhly $\beta = \alpha/4 = |\sphericalangle AVC_2|$, $\gamma = \alpha/16 = |\sphericalangle AVC_4|$, $\delta = \alpha/64 = |\sphericalangle AVC_6|$, $\varepsilon = \alpha/256 = |\sphericalangle AVC_8|$ a $\varphi = \alpha/1024 = |\sphericalangle AVC_10|$. Body C_8 a C_{10} nejsou z důvodu přehlednosti na obr. 1 zobrazeny.

Grafickým součtem úhlů β, γ, δ, ε a φ byl získán úhel σ o velikosti $\sigma = 24{,}98^\circ$. Nepřesnost konstrukce vzhledem k přesné hodnotě 25° tedy činí 0,08 %.

Na rozdíl od jiných geometrických konstrukcí je nepřesnost konstrukce nezávislá na velikosti počátečního úhlu a její velikost je dána pouze počtem iterací. Pro součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti činí její velikost 0,1 %. Tato konstrukce však porušuje třetí pravidlo, protože absolutní přesnosti nelze dosáhnout konečným počtem kroků.

Uvedenou konstrukci lze použít v hodinách matematiky na středních školách jako zajímavé využití geometrické posloupnosti, resp. konečného součtu nekonečné geometrické řady.



Obr. 1 Přibližná konstrukce trisekce úhlu v programu GeoGebra

Literatura

[1] Trisekce úhlu. [online], dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Trisekce_%C3%BAhlu.

[2] *Rokyta, M.*: Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a podobné „nemožné úlohy“. 2011, [online], dostupné z: http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/rokyta.pdf.

[3] *Solovský, J.*:, Origami a trisekce úhlu. 2014, [online], dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=gWbMRiEf6h4.

[4] *Králová, M.*: Eukleidovsky neřešitelné úlohy. [online], dostupné z: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/geometrie/eukleidovsky-neresitelne-ulohy.

[5] *Švecová, M.*: Klasické úlohy řecké matematiky. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2009, dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120017829.