Zajímavé matematické úlohy

Od 22. ročníku přešel náš časopis na vydávání elektronickou formou, které se promítlo i do fungování naší rubriky a byla zrušena dlouhodobá soutěž. Po uplynutí několik ročníků a několika změnách nastal čas rekapitulace. Rubrika Zajímavé matematické úlohy doprovází náš časopis již od jeho čtvrtého ročníku, letos jsme tím završili 25 let existence. V ročnících 22—28 časopisu bylo publikováno 68 zajímavých úloh od 22 autorů. Kromě členů redakční rady časopisu Matematika–Fyzika–Informatika *Stanislava Trávníčka* (†2017), *Jaroslava Švrčka* a *Pavla Calábka* (všichni po 8 úlohách) byli nejpilnějšími autory úloh *Robert Geretschläger*, *Jozef Mészáros* a *Jacek Uryga* (všichni po 6 úlohách). A teď to nejpodstatnější, rubrika je určena pro naše čtenáře, více než stovka různých řešitelů nám poslala celkem 506 správných a 78 částečných řešení. Našimi nejvěrnějšími řešiteli jsou *Karol Gajdoš* z Trnavy (52 úplných a 7 částečných řešení), *Anton Hnáth* z Moravan (47+7), *Jozef Mészáros* z Jelky (45+4), *Martin Raszyk* z ETH Zürich (48+0) a *František Jáchim* z Volyně (25+10).

I v následujícím ročníku pokračujeme v naší rubrice Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 259 a 260 můžete zaslat nejpozději do 20. 5. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.*

Úloha 259

Určete předposlední číslici desítkového zápisu čísla 11^{2020}.

Vladimír Vaněk

Úloha 260

Krychle $ABCDA'B'C'D'$ je složena z osmi jednotkových krychlí. Kolika způsoby ji můžeme rozdělit na dvě souvislé části, které jsou také složené z jednotkových krychlí (jednotkové krychle v souvislých částech sousedí aspoň jednou celou stěnou, na pořadí částí nezáleží)? (Pokud jednotkové krychle označíme podle vrcholů, které obsahují, pak příkladem dvou různých dělení jsou $\{A, A'\}$, $\{B, C; D, B', C', D'\}$ a $\{B, B'\}$, $\{A, C, D, A', C', D'\}$.)

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 255 a 256, jejichž zadání jsme zveřejnili v třetím čísle loňského (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 255

Nechť CD je výška tupoúhlého trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu B. Kružnice s průměrem CD protíná stranu AC v bodě E a úsečku BE v bodě F. Dokažte, že platí

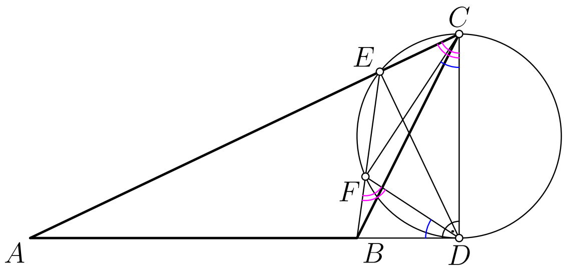
$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|.$$

Jacek Uryga

Řešení. Výška CD trojúhelníku ABC je kolmá na přímku AB, tedy tato přímka je tečnou kružnice s průměrem CD. Podle věty o úsekovém úhlu jsou shodné úhly FCD a FDB. Úhel ABC je tupý, body E a F tak leží v téže polorovině s hraniční přímkou CD a čtyřúhelník $CDFE$ je tětivový. Součet velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů C a F je $180°$, úhly FCD a BFD jsou tedy shodné. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku BDF u vrcholů D a F je roven velikosti jeho vnějšího úhlu u vrcholu B, proto

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BFD| + |\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|,$$

což jsme měli dokázat.



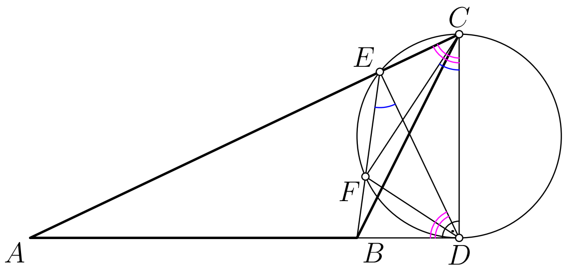
Obr. 1

Jiné řešení. V předchozím řešení jsme určili úhly v trojúhelníku BDF. Podobně můžeme určit úhly v trojúhelníku BDE. Kružnice s průměrem CD je tečnou k přímce AB, podle věty o úsekovém úhlu jsou úhly ECD a EDB shodné. Jelikož body C a E leží v téže polorovině s hraniční přímkou FD (což plyne z tupého úhlu u vrcholu B), podle věty o obvodovém úhlu jsou shodné úhly FED (tedy BED) a FCD. A stejně jako v předcházejícím řešení je součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku BDE u vrcholů

D a E roven velikosti jeho vnějšího úhlu u vrcholu B, proto

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EDB| + |\sphericalangle BED| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 2

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Daniel Czinege* a *Michaela Svatošová*, oba z GMK v Bílovci, *Amálíie Dostalíková*, *Vendula Onderková*, *Darian Poljak* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Richard Vojtěch Krejsa* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Tobiáš Krupa* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Huu Quy Nguyen* z G v Rumburce, *Kateřina Panešová* z G v Teplicích a *Karel Stehlík*, *Adéla Karolína Žáčková*, oba z GChD Praze 5, Zborovská.

Úloha 256

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného osmistěnu osmi různými barvami tak, aby každá stěna byla obarvena jednou barvou a různé stěny byly obarveny různými barvami. Obarvení čtyřstěnu považujeme za stejná, pokud se shodují v některém jeho otočení.

Pavel Calábek

Řešení. Barvy očíslujme od 1 do 8. Nechť stěna barvy 1 sousedí se stěnami barev p, q a r, kde $p < q < r$, odtud $p \leq 6$. Položme osmistěn stěnou barvy 1 na podložku a barvou p dopředu. Osmistěn je tak fixován a nyní můžeme určit počet obarvení.

- Pokud $p = 2$, mohou být zbývající stěny obarveny $6! = 720$ způsoby.
- Pokud $p = 3$, obarvíme barvou 2 některou ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylých 5 stěn obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 5! = 480$.

- Pokud $p = 4$, obarvíme barvami 2 a 3 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 4 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$.
- Pokud $p = 5$, obarvíme barvami 2, 3 a 4 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 3 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3! = 144$.
- Konečně, pokud $p = 6$, obarvíme barvami 2, 3, 4 a 5 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 2 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4! \cdot 2! = 48$.

Celkem tak existuje $720 + 480 + 288 + 144 + 48 = 1680$ různých obarvení osmistěnu.

Jiné řešení. Očíslujme stejně jako v předcházejícím řešení barvy od 1 do 8. Položme opět stěnu barvy 1 na podložku. Existují 3 strany této stěny, které mohou být vepředu, tedy takto umístěný osmistěn můžeme otočit 3 způsoby. Zbývající stěny osmistěnu můžeme obarvit 7! způsoby. Vzhledem k počtu otočení tak existuje $7!/3 = 1680$ různých obarvení čtyřstěnu.

Jiné řešení. Osmistěn můžeme na sebe otočit 3 způsoby kolem osy libovolné stěny. Každou stěnu můžeme otočit na zbývajících 7 stěn. Pokud stěny osmistěnu obarvíme libovolně 8! způsoby, vždy $3 \cdot 8$ bude stejných, celkem tak existuje $8!/24 = 1680$ různých obarvení čtyřstěnu.

Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Daniel Czinege* a *Michaela Svatošová*, oba z GMK v Bílovci, *Amálie Dostalíková*, *Darian Poljak* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Richard Vojtěch Krejsa* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Tobiáš Krupa* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Huu Quy Nguyen* z G v Rumburce, *Kateřina Panešová* z G v Teplicích a *Karel Stehlík*, *Adéla Karolína Žáčková*, oba z GChD Praze 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek