

Superelipsa a superformule

LUDEK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky, Masarykova univerzita, Brno

Kuželosečky patří k učivu, se kterým se většina studentů setká v průběhu svého středoškolského studia. Přestože bezesporu patří mezi důležité partie matematiky s řadou důležitých aplikací, pro studenty mohou představovat málo zajímavou a současně i relativně obtížnou kapitolu.

K určitému zatraktivnění by mohl přispět následující text, který poukazuje na širší souvislosti umožňující popisovat jednotným způsobem mnohem širší množinu křivek, než je samotná elipsa. Řadu takových křivek je navíc možné celkem snadno modelovat dostupnými grafickými programy, jako je např. Geogebra.

Samotný pojem elipsy, který zahrnuje mnoho různých aplikací a jejichž výčet by ovšem byl „nošením dříví do lesa“, bude proto pouze východiskem pro zavedení pojmů superelipsy a superformule.

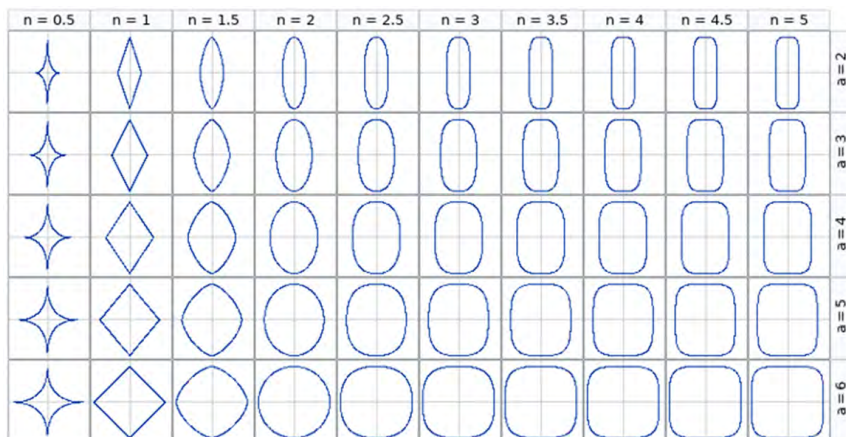
Laméovy křivky

Celou řadu křivek jako je kružnice, elipsa, ale také čtverec či obdélník lze vyjádřit jedinou rovnicí, jak v roce 1818 ukázal Gabriel Lamé.¹⁾ Zajímalo jej, jak se bude chovat zobecněná rovnice kružnice a elipsy [1, 2, 3, 4]

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad (1)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$, v případě, že měnil spíše hodnotu exponentu n , než délky poloos a, b . Změnami hodnot exponentu n Lamé získal široké spektrum křivek (obr. 1).

¹⁾ Gabriel Lamé (1795–1870) byl francouzský matematik a fyzik. Motivací Lamého práce bylo využít Descartovu analytickou geometrii pro popis tvaru krystalů, jejich rozmanitých tvarů, plocha a hran, ve kterých s plochy stýkají.



Obr. 1 Laméovy křivky pro různé hodnoty a a n ($b = 6$)

Pro $n = 2$ je grafem *elipsa* (pro $a = b$ *kružnice*), pokud hodnota n klesá k 1, pak se křivka ve vrcholech „zašpičatuje“ (*subelipsa*, pro $a = b$ *subkružnice*), pro $n = 1$ je grafem *paralelogram* (diamant). V případě, že je hodnota n menší než 1, pak mají strany křivky konkávní tvar (pro $n = 2/3$ je křivkou *asteroida*), pro $n = 0$ přechází křivka do kříže splývajícího s osami.²⁾

Pro $n > 2$ se strany křivky „zplošťují“ (*superelipsa*, pro $a = b$ *superkružnice*) a křivka se tvarem přibližuje obdélníku (obdélníkem se stává limitním přechodem $n \rightarrow \infty$, obr. 2) [8]. V článku budeme dále pro Laméovy křivky používat označení *superelipsa*, které navrhl P. Hein.³⁾ Hein použil superelipsu v architektuře, návrzích nábytku, šperků, při výrobě keramiky [7]. V 60. letech 20. století byla poměrně populární jím navržená

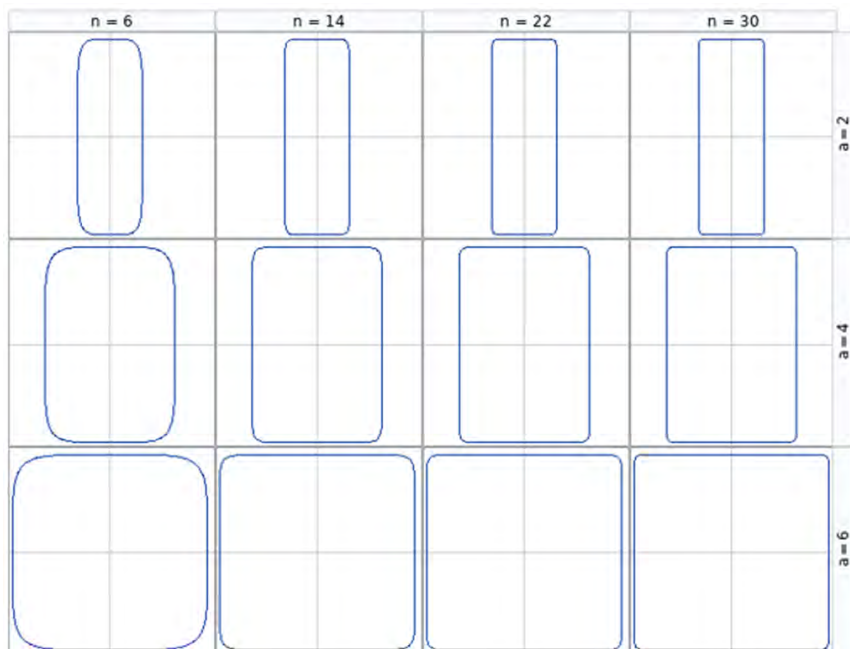
²⁾Křivky lze velmi snadno generovat v různých grafických programech, např. Geogebra apod. Zde uvedené obrázky byly vytvořené programy SAS/STAT (SAS Institut) a Graph (<https://www.stahuj.cz/>), např. na stránce <http://nb.procato.com/superellipse/> lze nalézt program online vykreslující superelipsy vzhledem k zadaným parametrům a určující obvod a obsah křivky.

³⁾Pro subelipsu a superelipsu se v literatuře objevuje rovněž označení *hypoelipsa*, resp. *hyperelipsa*. Piet Hein (1905–1996) byl dánský matematik a literát. Superelipsou označil křivku s hodnotou $n = 5/2$ a poměrem délek poloos $a/b = 6/5$, kterou navrhl pro kruhový objezd na obdélníkové náměstí Sergels Torg ve Stockholmu. Tvar superelipsy byl v architektuře použit opakovaně i později (např. Aztécký stadion v Mexico City). Kanadský architekt Gerald Robinson navrhl pro nákupní centrum v Peterborough v Ontariu supereliptické garáže ($a/b = 9/7$, $n = e$).

hračka mající tvar superelipsoidu, který vzniká rotací superelipsy o rovnici

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2,5} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2,5} = 1$$

kolem osy x , kde $a/b = 4/3$ [6].⁴⁾



Obr. 2 Laméovy křivky pro vyšší hodnoty exponentu n ($b = 6$)

Superelipsa není pouhá matematická kuriozita, neboť postupně nalezla zajímavé použití v některých oblastech aplikované matematiky. Skutečností, v minulosti ovšem často opomíjenou jsou příčné průřezy kmene stromů, jejichž tvar je jen zřídka kruhový. Výzkumníci zabývající se studiem tvaru příčných průřezů kmene stromů, přírůstem dřevní hmoty apod. tak nahrazují ve svých modelech kruhový tvar průřezu tvary eliptickými, či dokonce supereliptickými.

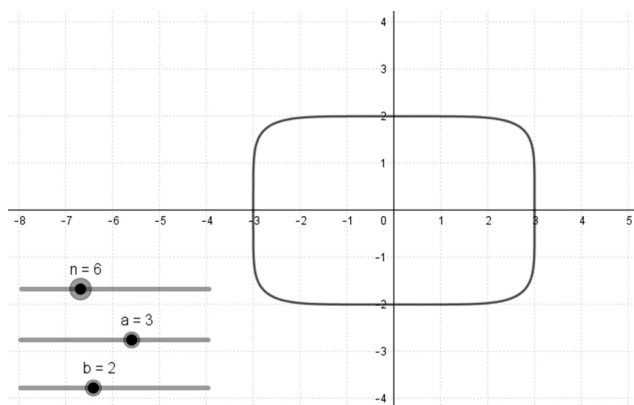
⁴⁾P. Hein navrhl pro superelipsoid název *superegg*.

Modelování superelipsy

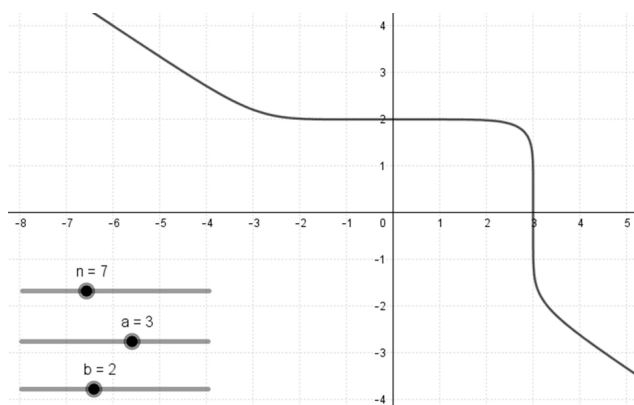
Při modelování superelipsy v Geogebře je možné pro její konstrukci přímo využít implicitní rovnici (1). Pro každou čtvrtinu grafu zapíšeme samostatnou rovnici

$$\left(\pm\frac{x}{a}\right)^n + \left(\pm\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (2)$$

kde koeficienty a , b a exponent n zadáme pomocí posuvníků. Na obr. 3 si můžeme povšimnout, jak závisí tvar křivky na sudé a liché hodnotě exponentu n .



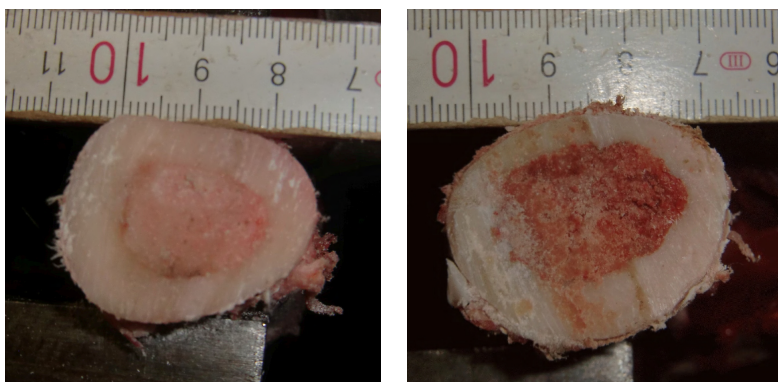
Laméovy křivky pro sudé exponenty (Geogebra)



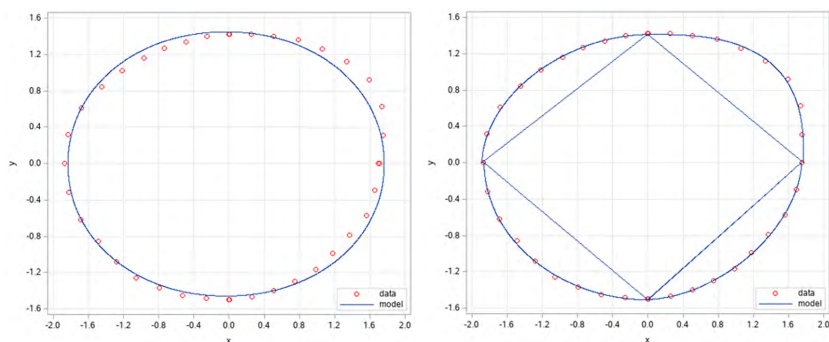
Laméovy křivky pro liché exponenty (Geogebra)

Obr. 3

V úvodu bylo zmíněno použití superelipsy při modelování tvarů stromových letokruhů. My zde jako příklad uvedeme možnost využít superelipsu k modelování tvaru příčných průřezů dlouhých kostí suchozemských obratlovců. Příčné průřezy pažních a stehenních kostí jsou obvykle protažené ve směru osy pohybu zvířete a jejich tvar zhruba odpovídá elipse. Z obr. 4 je zřejmé, že skutečný tvar průřezů se však od elipsy více či méně odchyluje. Zakřivení okraje budeme dále posuzovat použitím superelipsy, pro kterou se pokusíme určit vhodnou hodnotu exponentu n . Jednoduchá superelipsa (obr. 5 vlevo) jako osově souměrná křivka neprokládá dostatečně spolehlivě body v nepravidelných částech okraje řezu kostí, lepší volbou je použití

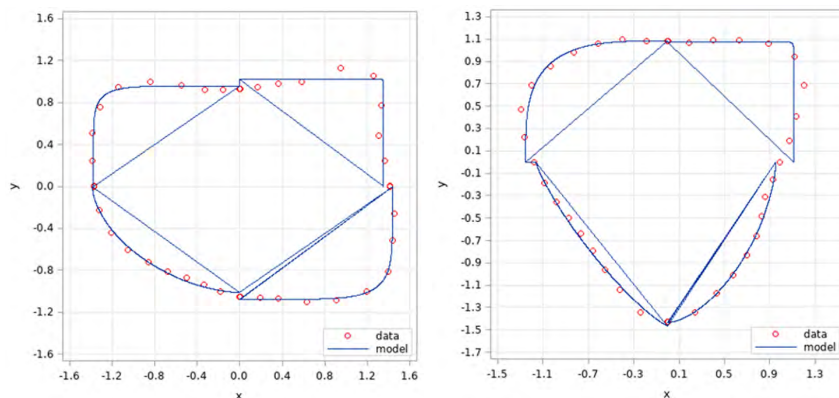


Obr. 4 Příčné řezy středem holenní (vlevo) a pažní kostí jelena lesního (vpravo)



Obr. 5 Model jednoduché superelipsy (vlevo, $n = 2,07$), model skládané superelipsy (vpravo, exponenty řazené po kvadrantech, $n = 2,83$; $n = 1,85$; $n = 1,97$; $n = 1,73$) k příčnému řezu pažní kostí jelena lesního (obr. 4 vpravo)

Využití takto provedeného odhadu tvaru průřezu může např. výrazně zpřesnit výpočet plochy příčného řezu, který se uplatňuje při posuzování napětí ovlivňujícího odolnost kosti proti ohnutí nebo zlomení.⁵⁾ Dlužno dodat, že některé dlouhé kosti mají průřez natolik nepravidelný, že jej model skládané superelipsy nezachytí s dostatečnou přesností (obr. 6).



Obr. 6 Průřez vřetenní kostí modelovaný skládanou superelipsou (jelen, prase)

Obdobně je možné zaznamenat přítomnost supereliptických tvarů v řadě dalších přírodních i uměle vyrobených objektech (viz výše). Z přírodních za zmínku kromě již výše uvedených stojí dále např. průřezy kmeny bambusů (příčné i podélné) či stonky rostlin [2, 3]. Zejména v případě zmíněných stonků supereliptické uspořádání přináší větší stabilitu a odolnost proti případnému ohnutí či zlomení (podobně jako u kostí).

⁵⁾Optimalizace tvaru byla řešena použitím nelineární regrese metodou důvěryhodné oblasti (TRM) s využitím softwaru SAS/STAT (SAS Institut). Oficiální stránky společnosti SAS: https://www.sas.com/cs_cz/home.html. Software lze pro výzkumné a studijní účely používat bezplatně, ke stažení zde: https://www.sas.com/cs_cz/software/university-edition/download-software.html#windows. Na stránkách společnosti je uveden podrobný postup instalace softwaru. Řešení řady problémů softwarem SAS lze nalézt např. na <https://blogs.sas.com/content/iml/>. Výpočet plochy superelipsy není zcela triviální záležitostí, vyžaduje použití tzv. gamma funkce (Γ)

$$S = 4ab \frac{(\Gamma(1 + 1/n))^2}{\Gamma(1 + 2/n)}.$$

K tabelování hodnot gama funkce při výpočtu plochy lze např. použít funkci GAMMA v programu Excel (statistické funkce). Více o vlastnostech gama funkce např. na https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce.

Superformule

Omezená symetrie superelipsy ovšem není příliš vhodná pro modelování složitějších či nepravidelných tvarů. Takovými mohou být např. již zmíněné průřezy některými dlouhými kostmi, ale také stonky a listy rostlin apod., které se výrazně odlišují od eliptických tvarů nebo objekty, které jsou tvořené několika zhruba identickými částmi, tj. projevující určitou míru rotační symetrie. Přitom zejména u rostlin (a v určité míře i živočichů) můžeme takové symetrie jejich tělních částí běžně zaznamenat. Takto můžeme popsat pravidelné (paprsčité souměrné) květy (např. karkost, mochna), dlanitě složené (např. jetel, vlčí bob, jírovec, jahodník) nebo zpeřené (např. jasan) listy, semena (olše) či plody řady rostlinných druhů.

Zajímavý způsob zavedení rotační symetrie do rovnice superelipsy popsal Johan Gielis [2]–[4], který tak navázal na práci G. Lamého. Implicitní tvar rovnice (1) ovšem není vhodným nástrojem, mnohem lepších výsledků dosáhneme použitím polárních souřadnic (ρ, θ) . Do rovnice (1) postupně zavedeme substituci

$$x = \rho(\theta) \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta, \quad (3)$$

tedy

$$\left| \frac{\rho(\theta) \cos \theta}{a} \right|^n + \left| \frac{\rho(\theta) \sin \theta}{b} \right|^n = 1$$

po dalších úpravách pak

$$\rho(\theta) = \left(\left| \frac{\cos \theta}{a} \right|^n + \left| \frac{\sin \theta}{b} \right|^n \right)^{-\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

kde pro $a \neq b$ získáme polární rovnici *superelipsy*, pro $a = b$ pak polární rovnici *superkružnice*.

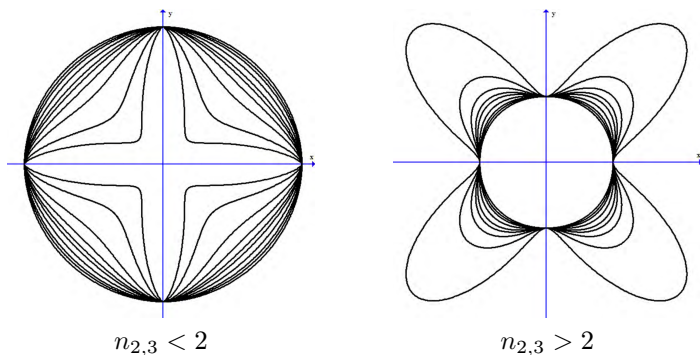
Pokud dále odlišíme v polární rovnici superkružnice ($a = b = 1$) hodnoty jednotlivých exponentů, pak

$$\rho(\theta) = (|\cos \theta|^{n_2} + |\sin \theta|^{n_3})^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (5)$$

kde $n_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n_{2,3} \in \mathbb{R}$.

Pro $n_2 = n_3$ a $n_{2,3} < 2$ jsou jednotlivé tvary vepsány do kružnice (obr. 7, vlevo), pro $n_{2,3} > 2$ naopak kružnici opsány (obr. 7, vpravo). Parametr $1/n_1$ působí jako jakási „tahová“ či „tlaková síla“ na jednotlivé strany,

zatímco „kotevní body“ křivek (0° , 90° , 180° , 270°) jsou pevně fixovány ke kružnici (obr. 7).



Obr. 7 Křivky získané z rovnice (5) pro $n_2 = n_3$, $n_1 > 0$

Jestliže do argumentů obou goniometrických funkcí navíc vložíme parametr $m/4$ ($m \in \mathbb{R}$), pak získáme rovnici

$$\rho(\theta) = \left(\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{m}{4}\theta\right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m}{4}\theta\right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (6)$$

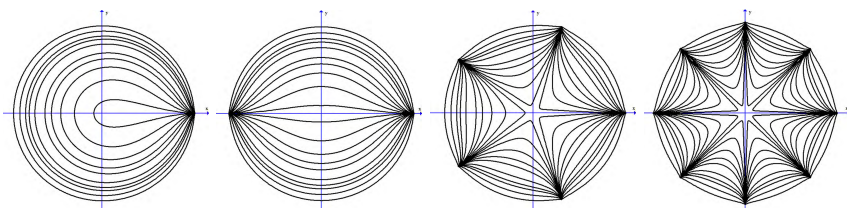
kteřá umožňuje detailnější vyjádření symetrie (obr. 8, 9) než v případě superelipsy, která je omezena na čtyři základní kvadranty.⁶⁾ Z obr. 8, 9 je zřejmé, že hodnota parametru m určuje počet zachovávajících se „kotevních bodů“ a dovoluje rozdělit rovinu do libovolného počtu sektorů. Takto zobecněná rovnice superelipsy byla Johanem Gielisem označena jako superformule.⁷⁾

Rotací symetrie vyplývající z použití parametru $m/4$ definuje *polygony* (vepsané *subpolygony*, obr. 8, popř. opsané *superpolygony*, obr. 9), jejichž vrcholy jsou fixované k základní kružnici, v rozích jsou polygony zašpičatělé nebo naopak zploštělé, strany polygonů jsou přímé, konvexní nebo konkávní.⁸⁾

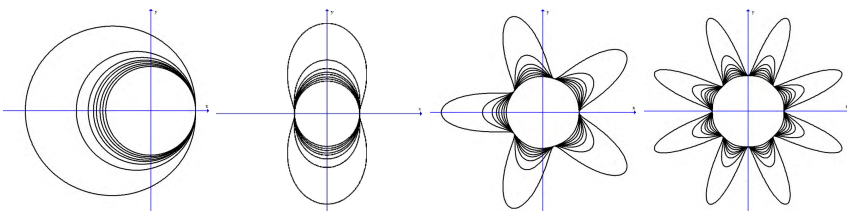
⁶⁾Hodnota koeficientu m může být pro goniometrické funkce různá, tj. $m_1 \neq m_2$.

⁷⁾Johan Gielis (1962) je belgický botanik a matematik. V anglicky psané literatuře je superformule označovaná jako *Superformula*, *Gielis Formula* nebo *Gielis Superformula*.

⁸⁾Uvážením Gielisovy transformace lze pojem mnohoúhelníku chápat obecněji. Pokud počet kotevních bodů sub- a superpolygonů ztotozníme s počtem vnitřních úhlů, pak lze dodatečně zavést pojmy nuláúhelník (zerogon), jednoúhelník (monogon) a dvojúhelník (diagon). Na druhou stranu vzhledem k tomu, že podle obecného vzorce pro výpočet

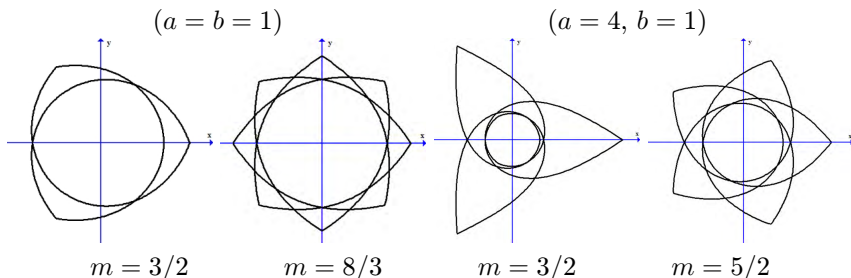


Obr. 8 Křivky (subpolygony) získané z rovnice (6) pro $a = b = 1$ a různé hodnoty parametru symetrie m ($m = 1, 2, 5, 8$), $n_{2,3} < 2$, $n_1 > 0$ (upraveno podle [3])



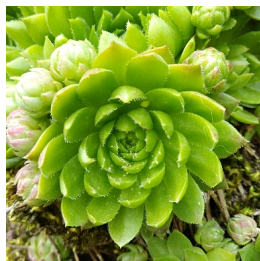
Obr. 9 Křivky (superpolygony) získané z rovnice (6) pro $a = b = 1$ a pro různé hodnoty parametru symetrie m ($m = 1, 2, 5, 8$), $n_{2,3} > 2$, $n_1 > 0$

Jestliže je hodnota čísla m zlomková ($m = p/q$), pak se tvar neuzavírá po jedné otáčce, nýbrž po q rotacích. Tak např. pro $m = 8/3$ se tvar uzavírá po třech rotacích (6π). Gielis [3] označil takto vznikající tvary jako *superpolygramy* (obr. 10). Na obr. 11 příklady přírodnin odpovídajících křivkám určeným rovnicí (6).



Obr. 10 Křivky (superpolygramy) pro racionální hodnoty parametru symetrie m ($n_{1,2,3} = 1$)

plochy pravidelného polygonu $S = mr^2 \operatorname{tg}(\pi/m)$, pro uvedené polygony nelze stanovit velikost jejich plochy, nebudeme je z pohledu běžné geometrie za polygony považovat.



Obr. 11 Přírodní modely polygonů a polygramů (cibule, netřesk)

Transformace rovinných křivek

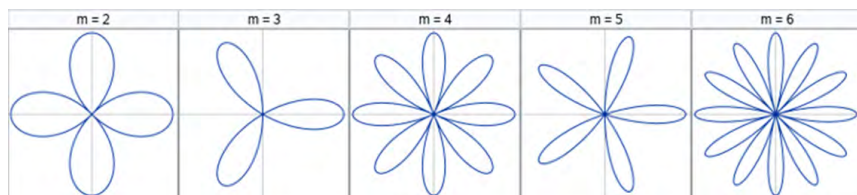
Jak bylo ukázáno výše, superrovnice umožňuje transformovat elipsu do množiny sub- a superelips. Použitím superrovnice lze dále libovolnou kladnou reálnou funkci určenou polární rovnicí $f(\theta)$ transformovat do polární rovnice (tzv. Gielisova transformace) [3]

$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (7)$$

která zavádí rotační symetrii funkce $f(\theta)$. Vhodnými kandidáty pro zmíněné transformace jsou zejména trigonometrické funkce a spirály.

Protože se v další části zaměříme zejména na modelování tvarů květů a listů rostlin, vyjdeme z polární rovnice křivky označované jako *Grandiho růžice* (*rhodonea*)⁹⁾

$$f(\theta) = \cos(m\theta). \quad (8)$$



Obr. 12 Modely Grandiho růžice

⁹⁾Křivku objevil mezi lety 1723 až 1728 italský matematik Guido Grandi (1671–1742). V anglicky psané literatuře je křivka označovaná jako *Rose curve*, *Rhodonea curve*, *Grandi curve*. Alternativně lze pro vyjádření křivky použít rovnici $f(\theta) = \sin(m\theta)$. Více o vlastnostech křivky např. <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>.

Tato křivka vytváří v rovině množinu tvarů tvořených shodnými částmi, jejichž počet závisí na hodnotě parametru m . Křivku pro liché m tvoří m „okvětních lístků“ a $2m$ „okvětních lístků“ pro sudé m (obr. 12).¹⁰⁾

Modelování tvaru květů

Jak korunní či okvětní plátky rostlin (obr. 16), tak listy rostlin obvykle nejsou jednoduše tvarově srovnatelné s modely *Grandiho růžice* (obr. 12). Použití Gielisovy transformace nalezením odpovídajících hodnot parametrů umožňuje modelovat různě složité tvary vyjadřující jak určitý stupeň rotační symetrie, tak rozmanitý tvar a velikost jednotlivých lístků.

Pokud na rovnici Grandiho růžice aplikujeme Gielisovu transformaci, pak získáme rovnici [2, 3]

$$\rho(\theta) = \left| \cos\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{\frac{1}{n_4}} \left(\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (9)$$

V důsledku použití absolutní hodnoty křivku tvoří m okvětních lístků pro liché i sudé m (obr. 13), hodnota exponentu $n_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ovlivňuje jejich tvar (obr. 14).

SAS program (SAS/STAT) modelující Grandiho křivky (rhodonea) znázorněné na obr. 13–15 je tento:

```
data Rhodonea;
n = 1;
do m = 2 to 6 by 1;
do theta = 0 to 2*constant("pi") by 0.01;
r = cos(m*theta);
x = r*cos(theta);
y = r*sin(theta);
output;
end;
end;
run;

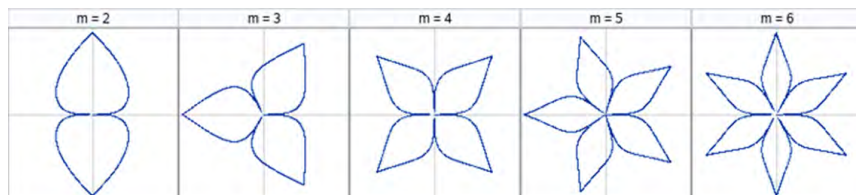
ods graphics / width=800px height=400px;
proc sgpanel data=Rhodonea aspect=1 noautolegend;
styleattrs datacontrastcolors=(crimson green);
panelby m n/ layout=lattice onepanel;
```

¹⁰⁾V anglicky psané literatuře jsou „okvětní lístky“ označovány jako *petala*.

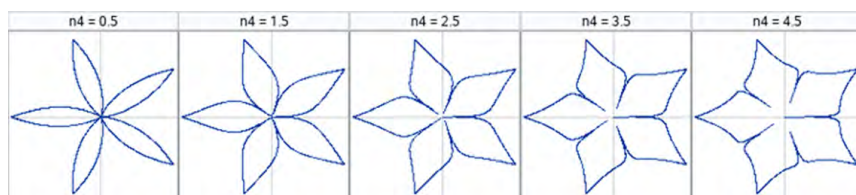
```

refline 0 / axis=x transparency=0.5;
refline 0 / axis=y transparency=0.5;
series x=x y=y;
colaxis display=none;
rowaxis display=none;
run;

```

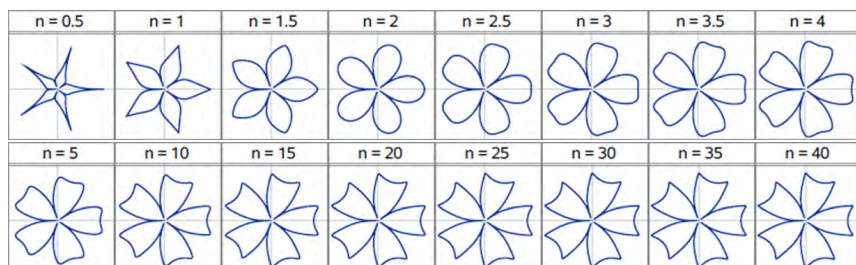


Obr. 13 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 2, a = b = 1$)



Obr. 14 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($n_1 = n_2 = n_3 = 1, a = b = 1$)

Na obr. 15 zaznamenáme postupnou změnu tvaru „superkvětů“ s rostoucí hodnotou exponentů n_1, n_2, n_3 (pro zjednodušení voleno $n = n_1 = n_2 = n_3$).



Obr. 15 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($m = 5, n_1 = n_2 = n_3 = n, n_4 = 2, a = b = 1$)

Příkladů dokládajících přítomnost tvarů odpovídajících transformacím Grandiho růžice existuje nespočet (obr. 16). Fascinující na této záležitosti je však zejména relativní jednoduchost rovnice, která jednotlivé tvary vytváří a omezený počet parametrů, jejichž hodnoty popisovaný či hledaný tvar určují.



Obr. 16 Přírozené variace pětičetné Grandiho růžice (zleva: brutnák, dýně, zvonek, kakost)

Modelování superformule v Geogebře

Výpočet přesných hodnot parametrů superformule modelující konkrétní tvary květů či listů rostlin by vyžadoval použití metod, které svou složitostí přesahují záměr článku, my si můžeme alespoň vyzkoušet odhad parametrů modelováním v Geogebře.

Model vytvoříme pomocí polární rovnice (9), kde parametry modelu m , a , b , n_1 , n_2 , n_3 , n_4 budou představovány posuvníky. Model je dále nutné transformovat do kartézských souřadnic, z matematických funkcí tedy zvolíme položku:

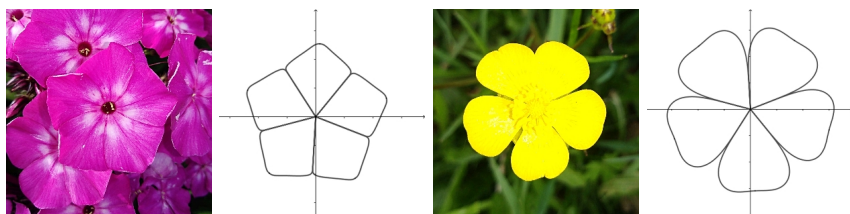
$$\text{Krivka } (\langle \text{Výraz} \rangle, \langle \text{Výraz} \rangle, \langle \text{Parametr proměnné} \rangle, \\ \langle \text{Počáteční hodnota} \rangle, \langle \text{Koncová hodnota} \rangle),$$

do které vložíme výrazy $(\rho(t) * \cos(t), \rho(t) * \sin(t))$, parametr proměnné (t) , počáteční (0) a koncovou hodnotu (2π) . V případě potřeby je možné do výrazů doplnit další parametr

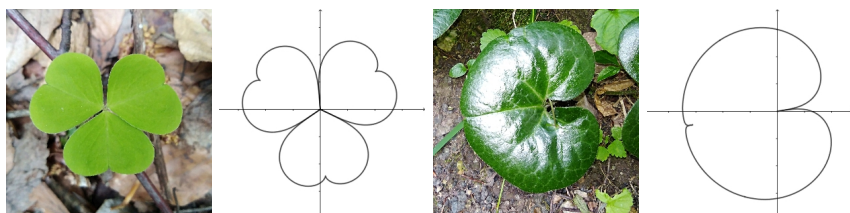
$$\rho(t) * \cos(t + \alpha), \rho(t) * \sin(t + \alpha),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr umožňující rotaci modelu kolem středu.

Na obr. 17 a 18 jsou příklady modelů jednoduchých květů a listů zobrazených v Geogebře.



Obr. 17 Květy a jejich modely v Geogebře (plaménka¹¹), pryskyřník¹²)



Obr. 18 Listy a jejich modely v Geogebře (šťavel¹³), kopytník¹⁴)

Rovnici (7) lze modifikovat mnoha způsoby a dosáhnout tak požadovaného tvaru. Nabízí se např.:

- Použití racionální hodnoty parametru m nebo rozlišení hodnoty parametru $m_1 \neq m_2$ v argumentech trigonometrických funkcí (např. rožec, obr. 19)

$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m_1}{2} \theta \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m_2}{2} \theta \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (10)$$

- Doplněním parametru δ do argumentu trigonometrických funkcí (např. tabák, obr. 19)

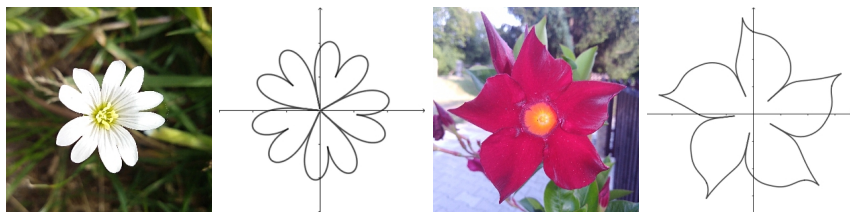
$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m}{2} (\theta + \delta_1) \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m}{2} (\theta + \delta_2) \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (11)$$

¹¹) Použité parametry rovnice (9): $m = 5$, $n_2 = n_3 = 2,5$, $n_1 = 20$, $n_4 = 50$.

¹²) Použité parametry rovnice (9): $m = 5$, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$, $n_1 = -4$, $n_4 = 4,5$.

¹³) Použité parametry rovnice (9): $m = 3$, $n_2 = n_3 = 0,5$, $n_1 = -5$, $n_4 = 3$.

¹⁴) Použité parametry rovnice (9): $m = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = -0,2$, $n_1 = 16$, $n_4 = 2,5$.



Obr. 19 Modely květů v Geogebře (rožec¹⁵, tabák¹⁶)

Závěr

Článek poukázal na méně známou oblast matematiky týkající se zobecněného pojmu elipsy, který byl zaveden již na počátku 19. století a který by patrně zůstal dále nepovšimnut nebýt příspěvní dánského matematika a vynálezce Pieta Heina a belgického botanika Johana Gielise. Přestože zejména Gielisova práce je poměrně nedávného data, našla jak v matematice samotné (např. numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, 3D modely), tak mimo matematiku již řadu zajímavých uplatnění, z nichž některá byla v článku zmíněna a další se postupně objevují (např. modely v buněčné biologii, výpočty trajektorií částic ve fyzice kapalin a další [10]). Dodejme rovněž, že teoretický výzkum vlastností Gielisovy superformule je příležitostí pro zájemce o geometrii křivek a matematiku obecně.

Ukončeme toto stručné pojednání citátem jednoho z největších myslitelů počátku novověku Galilea Galileiho: „Ve velké knize přírody může číst jen ten, kdo zná jazyk, v němž je napsána a tímto jazykem je matematika“ [11].

Literatura

- [1] *Bellos, A.*: Alexova dobrodružství v zemi čísel. Dokořán, Praha, 2015.
- [2] *Gielis, J.*: Inventing the circle. The geometry of nature. Geniaal Publishers. Antwerp, 2003.
- [3] *Gielis, J.*: The Geometrical Beauty of Plants. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [4] *Gielis, J.*: A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes. American Journal of Botany, roč. 90 (2003), č. 3, s. 333–338.

¹⁵Použité parametry rovnice (10): $f(\theta) = 1$, $m_1 = 5$, $m_2 = 10$, $b = a/2$.

¹⁶Použité parametry rovnice (11): $f(\theta) = \cos(5\theta/2 + 0,6)$, $a = 2$, $b = 3$, $\delta_1 = -0,2$, $\delta_2 = -2,6$

- [5] *Spíchal, L.*: Modeling the cross-sectional shape of the long bones using the superellipse. Matematika, informační technologie a aplikované vědy (MITAV 2019). Brno, Univerzita obrany, 2019.
- [6] *Pickover, C. A.*: The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics. Sterling Publishing Company, Inc., 2009.
- [7] *Gridgeman, N. T.*: Lamé ovals. The Mathematical Gazette, roč. 54 (1970), č. 387, s. 31–137.
- [8] *Gardner, M.*: The “superellipse”: a curve that lies between the ellipse and the rectangle. Scientific American, roč. 213 (1965), č. 3, s. 222–238.
- [9] *Wicklin, R.*: The spiral of splatter. Dostupné z: <https://blogs.sas.com/content/iml/2015/06/11/spiral-of-splatter.html>
- [10] *Matsuura, M.*: Gielis’ superformula and regular polygons. Journal of Geometry, roč. 106 (2015), s. 383–403.
- [11] *Devlin, K.*: Jazyk matematiky. Jak zviditelnit neviditelné. Dokořán, Praha, 2011.

Nejlevnější vaření (Úlohy z MO kategorie P, 39. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dalším pokračování dlouhodobého seriálu článků o úlohách z Matematické olympiády kategorie P (programování) vám představíme úlohu z krajského kola předlošského 67. ročníku MO (školní rok 2017/18). Úloha na první pohled pojednává o tom, jak nejlépe zkombinovat kuchařské recepty, abychom získali co nejlevněji požadované jídlo. Při její hlubší analýze ale zjistíme, že se vlastně jedná o grafový problém a při jeho řešení skutečně použijeme modifikace obecně známých algoritmů na hledání nejkratší cesty v grafu. Jako obvykle se nejprve seznámíme s přesným zadáním.

* * * * *