MATEMATIKA

Tři důkazy jedné trigonometrické nerovnosti

ŠEFKET ARSLANAGIĆ

Univerzita Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

V tomto příspěvku uvedeme tři odlišné důkazy jedné důležité trigonometrické nerovnosti a následně pak některé její přímé aplikace. Dříve však než zmíněnou nerovnost popíšeme a dokážeme, uvedeme jedno pomocné tvrzení, které následně uplatníme v jednom z důkazů zmíněné nerovnosti.

V celém článku budeme používat standardní označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC.

Lemma

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro délky jeho stran a velikosti vnitřních úhlů trojice rovností

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$
$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

kde $2s=a+b+c$.

Důkaz provedeme pouze pro první z uvedených tří identit (zbylé dvě pak dostaneme užitím principu cyklické záměny). Využijeme přitom známou rovnost

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{1}$$

která platí pro velikost α vnitřního úhlu při vrcholu A v libovolném trojúhelníku ABC. Z kosinové věty v trojúhelníku ABC ve tvaru

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

dostaneme po dosazení za $\cos\alpha$ v (1) a provedení následných úprav

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{4(s-b)(s-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\end{aligned}$$

Tím je důkaz lemmatu uzavřen.

Nyní uvedeme výše zmíněnou trigonometrickou nerovnost a její varianty získané užitím principu cyklické záměny:

Věta

Pro délky stran a, b, c a velikosti vitřních úhlů α, β, γ v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{b+c}, \quad \sin\frac{\beta}{2} \le \frac{b}{c+a}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{c}{a+b}.$$

První důkaz provedeme (stejně jako v případě dalších důkazů) pouze pro první z uvedených tří nerovností. Při jejím důkazu využijeme nerovnost (1), dokážeme tedy

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \le \frac{a}{b+c}.$$

Tuto nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \ge \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{(c+a-b)(a+b-c)}{4bc},$$

tj.

$$4a^2bc \ge (b+c)^2(c+a-b)(a+b-c) = (b^2+2bc+c^2)[a^2-(b-c)^2].$$

Po vynásobení výrazů na pravé straně, které přenecháváme čtenáři, upravíme poslední nerovnost postupně do tvaru

$$b^4 + c^4 + 2a^2bc - a^2b^2 - 2b^2c^2 - c^2a^2 \geq 0,$$
$$(b^2 - c^2)^2 - a^2(b - c)^2 \geq 0,$$
$$(b - c)^2[(b + c)^2 - a^2] = (b - c)^2(a + b + c)(b + c - a) \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, a s ohledem na platnost nerovnosti $b + c - a > 0$, je první z uvedených nerovností dokázána. Rovnost v ní nastane, právě když $b = c$. Užitím principu cyklické záměny platí tedy i zbylé dvě nerovnosti.

Druhý důkaz. Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Užitím sinové věty upravíme pravou stranu dokazované nerovnost i do tvaru

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c} = \frac{2r\sin\alpha}{2r\sin\beta + 2r\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} \geq \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Využitím známého goniometrického vzorce pro součet sinů dvou argumentů (ve jmenovateli na levé straně poslední nerovnosti) a dále vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu přepíšeme poslední nerovnost do tvaru

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \geq \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

lze nerovnost (2) snadno upravit na tvar

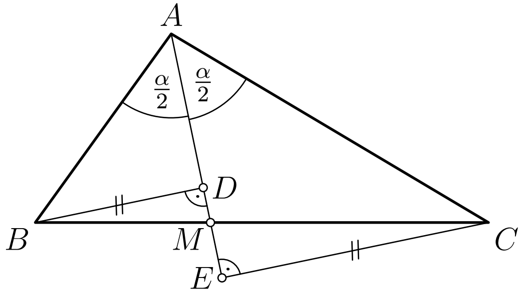
$$\frac{1}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \geq 1,$$

tj.

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leq 1,$$

což je evidentně platná nerovnost. Tím je i druhý důkaz uvedené nerovnosti uzavřen. Rovnost zde nastane, právě když $\beta = \gamma$, tedy, právě když $b = c$.

Třetí důkaz. Označme M průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A se stranou BC trojúhelníku ABC a D, E po řadě paty kolmic z vrcholů B, C k přímce AM, viz obr. 1.



Obr. 1

Z pravoúhlých trojúhelníků ABD a ACE vyjádříme

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|}. \tag{3}$$

Z rovností (3) a z trojúhelníkových nerovností v trojúhelnících BMD a CME dále plyne

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BD|+|CE|}{|AB|+|AC|} \leq \frac{|BM|+|CM|}{|AB|+|AC|},$$

tj.

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{|BC|}{|AB|+|AC|},$$

neboli

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se shodnými rameny AB a AC.

Poznámka. Ve všech třech nerovnostech uvedených v úvodní větě nastanou přitom rovnosti současně, právě když $a = b = c$, tedy v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný.

Nyní uvedeme několik aplikací právě dokázaných tří nerovností. Především součinem všech tří nerovností uvedených ve větě dostaneme bezprostředně

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \tag{4}$$

Na základě nerovnosti mezi aritmetickýcm a geometrickým průměrem pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel, přesněji užitím nerovností $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $b + c \ge 2\sqrt{bc}$ a $c + a \ge 2\sqrt{ca}$, můžeme pravou stranu (4) dále odhadnout následujícím způsobem:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{abc}{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}} = \frac{1}{8},$$

a tedy

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}. \tag{5}$$

Rovnost v (5) nastane, právě když $a = b = c$, tj. v případě rovnostranného trojúhelníku ABC.

Důsledek 1

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro velikosti jeho vnitřních úhlů α, β a γ nerovnost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{6}$$

Důkaz. Vyjdeme ze známé identity

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \tag{7}$$

která platí pro velikosti vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku ABC. O její platnosti se lze přesvědčit aplikací rovností $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, resp. $\frac{1}{2}\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, na levé, resp. na pravé straně (7), a následných úpravách. S ohledem na nerovnost (5) z této identity plyne

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le 1 + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

což přímo dokazuje uvedený důsledek. Rovnost v (6) nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

Důsledek 2

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro velikosti jeho vnitřních úhlů α, β a γ nerovnost

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3}{4}. \tag{7}$$

Důkaz. Také zde vyjdeme ze známé trigonometrické identity

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma), \tag{8}$$

která platí pro velikosti vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku (její důkaz je založen na trojím využití známé formule pro kosinus dvojnásobného argumentu). Pravou stranu (8) lze přitom odhadnout pomocí nerovnosti (6), a dostáneme tak

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4},$$

Tím je i druhý důsledek ověřen.

Existuje řada další zajímavých nerovností, které lze dokázat užitím výše dokázané věty a jejích důsledků. Např. v publikaci [2] lze na str. 20, nalézt nerovnost 2.9

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{3}{2},$$

kterou lze dokázat mj. užitím výše uvedených nerovností. Její důkaz ponecháváme čtenářům.

Z německého originálu psaného pro časopis Matematika–Fyzika–Informatika přeložil a upravil *Jaroslav Švrček.*

Literatura

[1] *Arslangić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] *Bottema, O., Djordjević, R. Ž, Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.*: Geometric inequalities. Wolters–Nordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.

[3] *Mintaković, S., Franić, M.*: Trigonometrija. Element, Zagreb, 1999.