Úlohy inspirované origami

LIBOR BELDÍK – JIŘÍ PŘIBYL

SPŠE a ZDVPP Žatec – Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

V současnosti bychom jen s obtížemi hledali mezi lidmi někoho, kdo by nevěděl, co se skrývá pod pojmem origami. Nadto je matematická veřejnost obvykle také obeznámena s faktem, že v oblasti origami je (z pohledu matematického) celá řada úloh a problémů různého stupně obtížnosti. Mnohé z nich jsou pak svým charakterem vhodné pro žáky základních nebo středních škol. Jak se snažíme názvem naznačit, budeme zde prezentovat úlohy s prvky origami, které byly řešeny během vyučování matematice, přičemž se jednalo o rozšířené hodiny matematiky.

Autoři článku si uvědomují, že učitel na základní, popř. na střední škole, má k dispozici poměrně velké množství úloh různé obtížnosti. Tyto úlohy k němu přicházejí nejen prostřednictvím různých učebních materiálů a sbírek, ale také z různých soutěží a testování. Přestože je těchto úloh hodně, domníváme se (na základě vlastní zkušenosti), že učitelé se rádi vracejí k úlohám, které sami vymyslí (objeví), popř. s nimiž je seznámili jejich žáci. Do této skupiny patří také úlohy prezentované v článku. Některé jsou původní (autorské), u jiných se ukázalo, že se v literatuře objevily již dříve. Úlohy, které předkládáme, jsou odzkoušené ve školské praxi a míra jejich obtížnosti odpovídá úlohám z matematiky nejvýše pro střední školy. Vzhledem k tomu, že úlohy ve vzdělávacím procesu hrají celou řadu rolí, necháváme na čtenáři (učiteli), aby se sám rozhodl, zda a popř. kam zařadí vybrané úlohy do své výuky.

Úlohy budeme prezentovat takovým způsobem, že čtenáři představíme určitou konstrukci (postup), a pak položíme otázku. Přeformulování úlohy do jiného kontextu není obtížné.

Začneme úlohou, jejíž idea se objevuje při řešení celé řady dalších úloh.

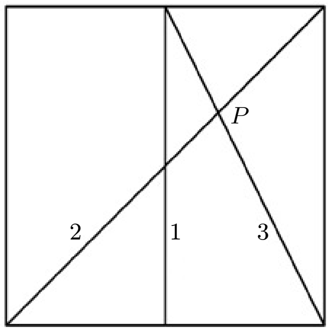
Úloha první

Mějme čtvercový papír. Sestrojme bod P konstrukcí, která je zaznamenána na obr. 1.[1] Jednotlivá čísla u úseček označují pořadí, ve kterém byly sestrojovány. Nejprve tedy byla sestrojena osa strany papíru, následně

[1] Hrany papíru a vytvořené přehyby budeme nazývat *úsečkami*. Jsme si vědomi toho, že v celé řadě publikací jsou tyto hrany označovány jako *přímky*.

pak osa úhlu. Než budeme pokračovat dále, můžeme s žáky (v závislosti na jejich věku) hledat odpovědi na následující otázky:

1) Kolik existuje os souměrnosti čtverce a které to jsou?
2) Které z os souměrnosti čtverce mají největší délku a které naopak nejmenší délku?
3) Jaké jsou délky os v milimetrech, pokud sestrojíme postupně čtverec z papírů formátu A3, A4 a A5?
4) Protínají se všechny osy souměrnosti čtverce v jednom bodě? Pokud ano, proč?
5) Mají osy i jiné pojmenování?



Obr. 1 Konstrukce bodu P

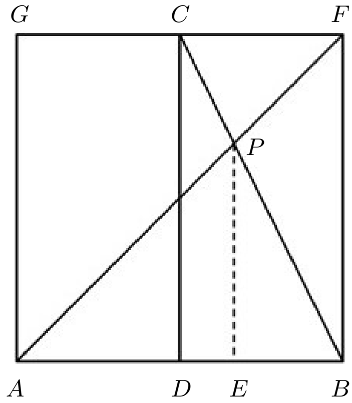
Nyní sestrojíme třetí úsečku tak, jak ukazuje obr. 1. Bod P vznikne jako průsečík úsečky 2 a úsečky 3. Určete:

1) V jakém poměru dělí bod P úsečku 2?
2) Vedeme-li z bodu P kolmici ke straně AB (viz obr. 2), v jakém poměru dělí pata kolmice E stranu papíru AB?
3) Obdobně předchozí otázce: Pokud sestrojíme kolmici z bodu P ke straně BF, v jakém poměru dělí pata této kolmice stranu BF papíru?

Před žáky jsme předstoupili pouze s druhou otázkou, přičemž po jejím zodpovězení, je nalezení odpovědi na otázky 1) a 3) již běžnou záležitostí.

Pro odpověď na tuto otázku sledujme obr. 2. Předpokládejme, že délka strany čtvercového papíru je rovna 1. Pokud se s tímto předpokladem žáci setkávají poprvé, je pro ně obtížně zdůvodnitelný či pochopitelný.

K tomuto zavedení můžeme dojít po provedení celé řady případů, kdy necháme žáky postupně pracovat s různě velkými čtverci a ukážeme, že na velikosti strany nezáleží.



Obr. 2 Dělení úsečky

Do kartézské souřadnicové soustavy umístíme čtverec tak, aby jeho vrchol A splynul s počátkem souřadnicového systému a bod F měl souřadnice $[1; 1]$. Souřadnice bodu P jsou neznámé, označíme je x, přesněji $P[x, x]$. Žáci by měli sami zdůvodnit, proč y-ová souřadnice bodu P je stejná jako x-ová. Úsečka AE má tedy délku x a úsečka EB má délku $1-x$. Ukážeme, že bod E dělí úsečku AB v poměru $2:1$.

Trojúhelníky BDC a BEP jsou podobné (věta uu), platí tedy

$$\frac{|CD|}{|PE|} = \frac{|BD|}{|BE|}$$

a odtud

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Úsečka AE má tedy délku $\frac{2}{3}$ a úsečka EB má délku $\frac{1}{3}$. Odtud plyne výše uvedený závěr.

Uvedená konstrukce se používá k dělení papíru nebo úsečky na tři shodné díly. Prezentovaný postup lze najít v celé řadě publikací, čtenářově pozornosti však doporučujeme [4].

Následující úloha je jedním z možných navázání na předchozí úlohu.

Úloha druhá

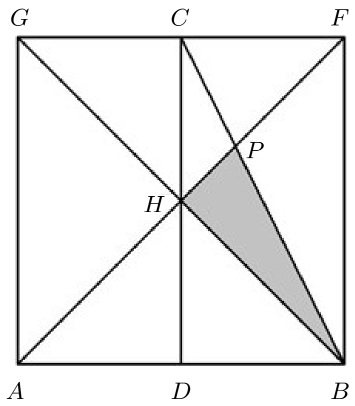
Předpokládejme, že strana čtverce z první úlohy má velikost 1. Určete obsah trojúhelníku FCP (viz obr. 2).

Tato úloha přirozeně vyplynula z toho, že žáci zkoumali vlastnosti výše prezentované konstrukce.

Obsah trojúhelníku FCP určíme snadno s využitím předchozího poznatku, že vzdálenost bodu P od úsečky FC je rovna $\frac{1}{3}$ (viz třetí otázka první úlohy a souřadnice bodu P), což je zároveň délka výšky v trojúhelníku FCP ke straně FC (označme ji v_1). Protože velikost úsečky FC je rovna $\frac{1}{2}$, pak obsah trojúhelníku FCP určíme následovně:

$$S_{FCP} = \frac{1}{2} \cdot |FC| \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Úlohu můžeme snadno modifikovat. Sestrojme přeložením papíru druhou úhlopříčku ve čtverci. Situace je znázorněna na obr. 3. Určete obsah vybarveného trojúhelníku BPH.



Obr. 3 Obsah trojúhelníku BPH

Obsah trojúhelníku BPH určíme jako rozdíl obsahů trojúhelníku BFH a trojúhelníku BFP. Obsah trojúhelníku BFH je roven $\frac{1}{4}$. Doporučujeme, aby si žáci tuto skutečnost ověřili právě přeložením daného čtverce nejprve podle jedné úhlopříčky, vznikne rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o polovičním obsahu, a následně přeložením podle druhé úhlopříčky, opět vznikne rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, avšak o čtvrtinovém obsahu čtverce.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku BFP využijeme znalosti o poloze bodu P. Z obr. 2 je patrné, že vzdálenost BE je velikostí výšky v trojúhelníku BFP na stranu BF. Označíme-li si velikost výšky jako v_2, potom platí $v_2 = \frac{1}{3}$. Obsah trojúhelníku BFP určíme jako

$$S_{BFP} = \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

a obsah trojúhelníku S_{FCP}

$$S_{BPH} = S_{BFH} - S_{BFP} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Za povšimnutí stojí fakt, a minimálně žáky tato skutečnost překvapila, že trojúhelníky FCP a BPH mají stejný obsah.

Čtenářům nabízíme další náměty pro výuku, resp. k další úvaze:

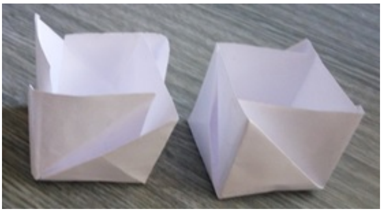
1) Povšimněte si vlastnosti, kterou má rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník. Přeložíme-li ho v polovině, tj. podle výšky spuštěné z vrcholu při pravém úhlu, získáme opět rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, avšak o polovičním obsahu. Jedná se o analogii s překládáním papíru formátu A. Přeložíme-li papír formátu A4, získáme papír formátu A5, avšak o polovičním obsahu. Oba trojúhelníky jsou podobné, stejně tak oba papíry A4 i A5 jsou podobné.
   a) Zdůvodněte, proč tuto vlastnost má mezi obdélníky pouze obdélník formátu papíru A.
   b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda existují i jiné trojúhelníky s touto vlastností, tj. po určitém přeložení vznikne trojúhelník s původním podobný (avšak o polovičním obsahu) než jen rovnoramenné pravoúhlé.
   c) V obou případech určete koeficient podobnosti.
2) Určete obsahy trojúhelníků HPC a GBC.
3) Povšimněte si, že je-li dán čtverec papíru o straně 1, umíme sestrojit trojúhelníky s obsahy: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$. Rozhodněte, zda lze sestrojit trojúhelník s obsahem $\frac{1}{3}$.
4) Jak se změní pozice bodu P, budeme-li pracovat nikoliv se čtvercem, ale s papírem formátu A, např. A4. K této úloze doporučujeme přejít až po vyřešení problému 1 tohoto seznamu. Vezměte v potaz skutečnost, že první úsečku můžete sestrojit dvěma různými způsoby – nejprve jako osu delší strany, následně pak jako osu kratší strany.

5) Jak se změní poloha bodu P, budeme-li pracovat nikoliv se čtvercem, ale s obdélníkem s poměrem stran 1 : 2. Zvažte obě možnosti.

Zatímco první úloha je standardní a druhá vznikla jako reakce na tuto úlohu, následující úlohy vznikly spontánně při výuce matematiky z podnětů žáků.

Úloha třetí

V rámci výuky jsme se zabývali modelem krychle, jejímž autorem je první z autorů článku. Autorům je známo přes třicet různých způsobů, jak s pomocí origami vytvořit model krychle. Do výuky byl zvolen model, který se složí ze dvou čtvercových papírů. Byl vybrán z toho důvodu, že jeho poskládání není obtížné a zvládnou ho i méně zruční žáci – je netriviální, nespočívá jen ve spojení šesti stěn a je méně obvyklý. Sestavenou krychli je vidět na obr. 5, jednotlivé moduly, ze kterých vzniká, pak na obr. 4.



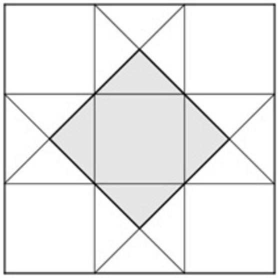
Obr. 4 Dvě části modelu krychle (žákovská práce)

Obr. 5 Složený model krychle (žákovská práce)

Tato úloha vznikla, když žáci rozložili model na dva jednotlivé díly – moduly – a zkoumali u daného modulu jeho geometrické vlastnosti. Vzniklý čárovec[2] lze vidět na obr. 6.

[2] Rozložený papír, ve kterém jsou vidět (popř. jsou zvýrazněny jen ty nejdůležitější) hrany, které vznikaly v průběhu skládání.

Mějme čtvercový papír o straně délky 1. Určete, jaký je obsah vystínovaného útvaru.



Obr. 6 Čárovec rozloženého modulu krychle

Řešení úlohy je následující: Naznačené vodorovné a svislé přehyby rozdělily čtvercový papír na 9 shodných čtverců, strana každého vzniklého čtverce má tudíž délku $\frac{1}{3}$ a obsah každého z těchto čtverců je $\frac{1}{9}$. Vybarvený čtverec má délku strany rovnu délce úhlopříčky čtverců vzniklých přehýbáním papíru (obr. 6), tedy $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Obsah vybarveného čtverce je pak roven

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Nabízíme i druhý způsob řešení. Uvědomme si, že vybarvený čtverec se skládá z jednoho „malého“ čtverce a čtyř trojúhelníků. Pomyslným přesunutím tří trojúhelníků k jednomu vybranému získáme další čtverec. Výsledkem je součet obsahů dvou čtverců, z nichž každý má obsah roven $\frac{1}{9}$.

Čtenářům zde nabízíme další náměty do výuky či k přemýšlení:

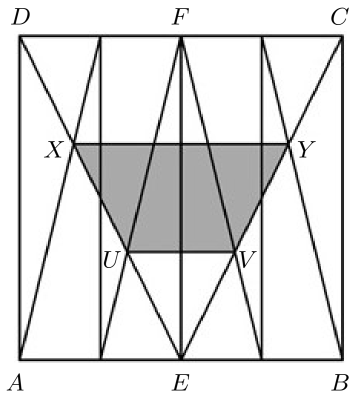
1) Úlohu lze modifikovat použitím obdélníkového papíru. Pokud budeme pracovat s obdélníkovým papírem, vznikne kvádr.
2) Rozmyslete si, jak sestrojit modul pro sestavení krychle. Napovíme, že k vyřešení tohoto problému s úspěchem můžete využít výsledek první úlohy našeho článku.
3) Doplňte do čárovce úhlopříčky do čtyř rohových čtverců a do prostředního čtverce. Získáte papír rozdělený na 36 shodných (rovnoramenných pravoúhlých) trojúhelníků. Rozhodněte, zda je možné vyznačit na papíru čtverce s obsahem: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ a 1.

   Nepodaří-li se vám nalézt čtverec, rozhodněte, zda existuje alespoň obdélník s daným obsahem.

Také následující úloha vznikla ve vyučovací hodině, její ideový základ položili žáci sami, když se snažili pomocí přehýbání papíru konstruovat různé rovinné obrazce. Celkem snadno se jim podařilo sestrojit kromě čtverce, obdélníku, rovnoramenného trojúhelníku i rovnoběžník a lichoběžník.

Úloha čtvrtá

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $UVYX$, jak je ukázáno na obr. 7.



Obr. 7 Rovnoramenný lichoběžník $UVYX$

V lichoběžníku $UVYX$ postupně určete:

1) velikosti obou základen,
2) délku ramene,
3) výšku lichoběžníku,
4) obsah lichoběžníku,
5) velikost úhlu, který svírá rameno se základnou XY.

Nabízíme řešení, které je založeno na analytické geometrii. Pro řešení úlohy, resp. pro zodpovězení některých otázek, je vhodné určit souřadnice bodů X, Y, U, V. Předpokládejme, že čtverec papíru má velikost strany 1. Umístěme čtverec do kartézské soustavy souřadnic tak, že bod A bude umístěn do počátku a bod C má souřadnice $[1; 1]$. Body B a D budou mít po řadě souřadnice $[1; 0]$ a $[0; 1]$. Pokud jste neopomenuli řešit první úlohu, pak je jasné, že paty kolmic z bodu X k úsečkám DA a AE dělí každou z nich v poměru $1 : 2$. Snadno již určíme, že bod X má souřadnice $\left[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$.

Obdobně určíme souřadnice bodu U, které jsou $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$. Následně určíme souřadnice bodů V a Y, které jsou po řadě $\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$ a $\left[\frac{5}{6}; \frac{2}{3}\right]$. Nyní již snadno zodpovíme dané otázky.

ad 1)

$$|XY| = \frac{2}{3}, \quad |UV| = \frac{1}{3},$$

ad 2)

$$|XU| = \sqrt{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

ad 3) výšku lichoběžníku označíme v, platí

$$v = \frac{1}{3},$$

ad 4) obsah lichoběžníku určíme ze známého vztahu

$$S = \frac{1}{2}(|XY| + |UV|)v = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

ad 5) úhly YXU a XEA jsou střídavé, tedy shodné. Budeme se tedy zabývat úhlem XEA, jehož velikost označíme α. Užitím Pythagorovy věty nejprve určíme velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku AED s pravým úhlem při vrcholu D:

$$|ED|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$
$$|ED| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Z definice funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku víme, že

$$\sin\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chceme-li zjistit přibližnou hodnotu α, užijeme inverzní funkci arkus sinus (arcsin).

$$\alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} \doteq 63{,}43^\circ.$$

Zájemcům o tuto problematiku nabízíme další náměty pro výuku:

1) Dokažte, že bod U leží na úhlopříčce AC.

2) Určete obsah lichoběžníku $XYCD$.

3) Určete úhel, který svírá rameno XU lichoběžníku $UVYX$ se základnou UV.

4) Jak se změní jednotlivé hledané velikosti, budeme-li pracovat s papírem s poměrem stran 2 : 1?

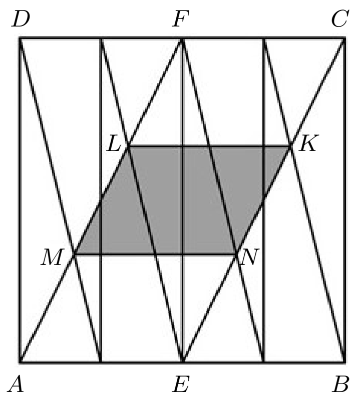
5) Jak se změní jednotlivé hledané velikosti, budeme-li pracovat s papírem formátu A?

6) Je daný lichoběžník $UVYX$ tečnový či tětivový?

Poslední úloha, kterou předkládáme čtenářům, je variací na předchozí téma.

Úloha pátá

Sestrojme rovnoběžník stejně jako na obr. 8.



Obr. 8 Rovnoběžník $KLMN$

V rovnoběžníku $KLMN$ postupně určete

1) délku strany KL,

2) délku strany LM,

3) výšku rovnoběžníku,

4) obsah rovnoběžníku.

Řešení této úlohy je obdobné jako úlohy předešlé. Opět můžeme využít metod analytické geometrie a stejně jako v předchozí úloze umístit čtverec do kartézské soustavy souřadnic tak, aby bod A měl souřadnice $[0; 0]$, bod C měl souřadnice $[1; 1]$ a body B a D měly po řadě souřadnice $[1; 0]$ a $[0; 1]$. Opět (jako v předešlé úloze) si stačí uvědomit, že bod M dělí úsečku DA v poměru $2 : 1$ a úsečku AE v poměru $1 : 2$. Takže bod M bude mít souřadnice $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$. Obdobným způsobem určíme i zbývající souřadnice. Bod N bude mít souřadnice $\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$, bod K bude mít souřadnice $\left[\frac{5}{6}; \frac{2}{3}\right]$ a bod L souřadnice $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. Nyní již opět snadno zodpovíme stanovené otázky:

ad 1)

$$|LK| = \frac{1}{2},$$

ad 2)

$$|ML| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

ad 3) výšku rovnoběžníku označíme v, platí

$$v = \frac{1}{3},$$

ad 4) obsah rovnoběžníku určíme ze vztahu

$$S = |MN| \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

V případě čtvrté otázky této úlohy pak nastíníme, jak by se dalo postupovat bez využití metody analytické geometrie. Povšimněme si rovnoběžníku $AECF$. Je zřejmé, že platí

$$|KL| = |MN| = |AE| = \frac{1}{2}.$$

Je zřejmé, že rovnoběžník $MNKL$ se do rovnoběžníku $AECF$ vejde celkem třikrát (je tvořen třemi shodnými rovnoběžníky). Obsah rovnoběžníku $AECF$ je $\frac{1}{2}$, neboť stačí od čtverce $ABCD$ odebrat dva trojúhelníky AFD a CEB, které po přesunutí vytvoří obdélník s obsahem $\frac{1}{2}$. Protože obsah rovnoběžníku $MNKL$ je třetinový obsahu rovnoběžníku $AECF$, pak je výpočet již snadný.

Čtenáři nabízíme pouze jeden námět k přemýšlení:

1) Určete rozměry papíru tak, abychom při provedení konstrukce rovnoběžníku získali kosočtverec.

Závěr

Naše zkušenosti ukazují, že použití origami ve výuce matematiky může hrát nejen roli motivační, ale právě také může ukázat, zda žákovy poznatky jsou pouze na úrovni formální či mírně je přesahující, nebo zda žák plně porozuměl dané problematice a je schopen aplikovat své znalosti i na školsky nestandardní úlohy. Vhodně zvolené úlohy mohou doplnit obvyklou výuku geometrie (především) a nenásilně přivést žáky k aktivnímu přístupu k výuce. Zkušenost, kterou jsme získali je taková, že průměrní nebo nenápadní žáci se projeví překvapivě, např. zajímavým řešením nebo tvořivou obměnou modelu či postupu skládání.

Předchozí text ukazuje, jak z původního tématu (dělení úsečky) vzájemnou interakcí mezi učitelem a žáky vznikly další, méně obvyklé úlohy. K dalšímu seznámení s problematikou „origami a matematika“ lze doporučit články [1], [2] a [3].

Literatura

[1] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Podivná trisekce úhlu. Vesmír, roč. 90 (2011), č. 7, s. 462–463.

[2] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Co lze zkonstruovat? Vesmír, roč. 90 (2011), č. 9, s. 524–525.

[3] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Co nelze zkonstruovat? Vesmír, roč. 92 (2013), č. 11, s. 645–647.

[4] *Hull, T.*: Project Origami: Activities for Exploring Mathematics. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA., 2006.