Jednoduchý planimetr

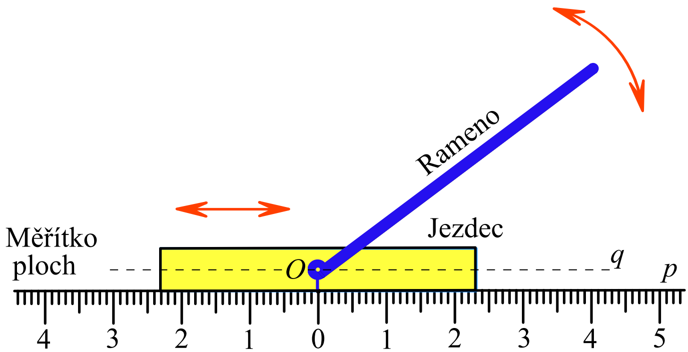
PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Na počátku 19. století vzrostla potřeba určování velikosti pozemků z map a plánů. To vedlo k vynálezům a zdokonalování různých typů *planimetrů*, jež sloužily k měření obsahů rovinných útvarů.

Planimetr, kterým se budeme zabývat, nesestavuje na rozdíl od jiných obsah měřeného útvaru po částech, ale je založen na převodu útvaru z mnohoúhelníku na trojúhelník téhož obsahu. Jeho funkční model si můžeme snadno vyrobit nebo vytvořit jeho počítačovou verzi v dynamické geometrii.

Vynález byl v různých variantách přiznán několika osobám. Všechny takové planimetry jsou v podstatě stejné, skládají ze tří částí (obr. 1).



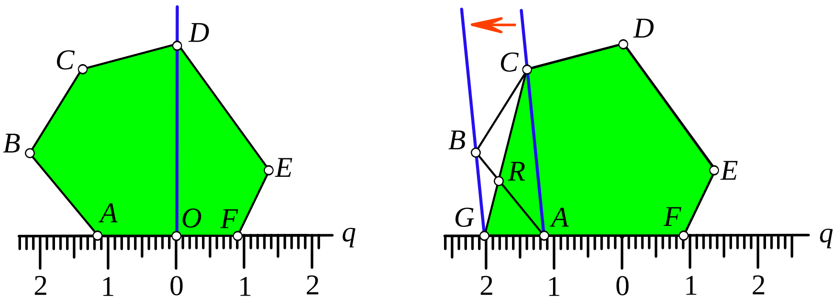
Obr. 1 Schéma planimetru

Měřítko ploch je pravítko se stupnicí. Umisťujeme je pevně na mapu do potřebné polohy. Podél jeho hrany p lze posouvat *jezdcem*, k němuž je otáčivě v bodě O připevněno *rameno*. Polohu bodu O, kterou určuje jeho kolmý průmět na přímku p, odečítáme pomocí rysky vyznačené na jezdci. Písmenem q budeme značit rovnoběžku s přímkou p vedenou bodem O.

Řada dostupných pramenů uvádí, že prvním autorem tohoto vynálezu je *Karel Gangloff* (1809–1879), který za něj ve Vídni roku 1856 obdržel malou bronzovou medaili. V podstatě stejný planimetr však sestrojil polský geodet *Jan Zaremba* (v polštině *Zaręba*) již roku 1829. Popsal jej v rodné řeči, a tak se o něm za hranicemi Polského království, které bylo částí carského Ruska, příliš nevědělo [9], [5]. První německy psaný popis [4] Zarembova planimetriu je z roku 1908.

1. Měření obsahu s pomocným výpočtem

Planimetry pro tento způsob měření měly stupnici i na ramenu, a to s počátkem v bodě O. I když se postup neobejde bez výpočtu, byl v praxi užíván a je vhodný pro naše úvodní úvahy. Bez újmy na obecnosti budeme zanedbávat vzdálenost bodu O od hrany p měřítka. Jinak řečeno, ztotožníme přímky q a p.



Obr. 2 Měření obsahu šestiúhelníku se dvěma vrcholy na přímce q

Máme zjistit obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ na obr. 2 jeho přeměnou na trojúhelník XDY téhož obsahu. Umístíme planimetr tak, aby body A a F ležely na přímce q, rameno planimetru procházelo vrcholem D a bylo kolmé k hraně měřítka ploch, a aby se bod O nacházel v počátku stupnice měřítka (obr. 2 vlevo). Výšku $v = |OD|$ trojúhelníku XDY zjistíme na stupnici ramene. Polohy krajních bodů X a Y jeho základny určíme na přímce q následovně.

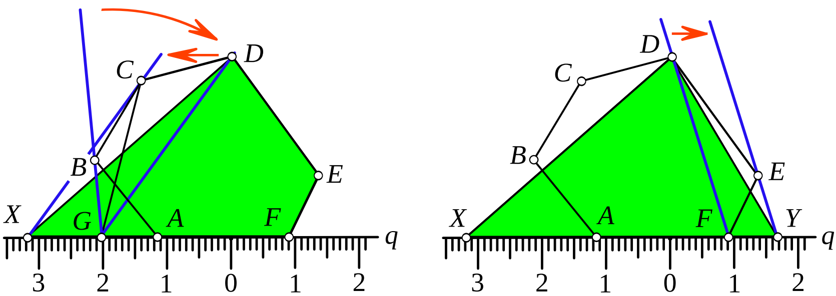
1. Rameno přemístíme do polohy AC a pak posuneme tak, aby procházelo vrcholem B. Výslednou polohu bodu O označíme G (obr. 2 vpravo). Platí $GB \parallel AC$. Záměnou trojúhelníku ACB za trojúhelník ACG téhož obsahu tedy nahradíme šestiúhelník $ABCDEF$ pětiúhelníkem $GCDEF$, aniž by se obsah útvaru změnil.

   Povšimněme si, že i obsahy trojúhelníků CBR a GAR, kde R je průsečík úseček AB a CG, jsou stejné. (Jsou to obsahy trojúhelníků

ACB a ACG zmenšené o obsah jejich společné části ACR.) Rovnost obsahů útvarů $ABCDEF$ a $GCDEF$ můžeme tedy zdůvodnit i odebráním trojúhelníku CBR a přidáním trojúhelníku GAR.

2. Rameno planimetru otočíme z polohy GB do polohy GD a pak posuneme, aby procházelo vrcholem C. Výslednou polohu bodu O označíme X (obr. 3 vlevo). Pětiúhelník $GCDEF$ jsme nahradili čtyřúhelníkem $XDEF$, aniž by se změnil obsah.

3. Nakonec analogicky upravíme ohraničení u vrcholu E: Rameno umístíme do polohy FD a potom posuneme do polohy $YE \parallel FD$.



Obr. 3 Další kroky měření obsahu šestiúhelníku

Získali jsme trojúhelník XYD s obsahem rovným obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$. Výšku trojúhelníku již známe a jeho základnu $z = |XY|$ určíme z poloh bodů X a Y zjištěných na stupnici planimetru.

Obsah šestiúhelníku je tedy

$$S = z \cdot \frac{v}{2}. \tag{1}$$

2. Přímé měření obsahu

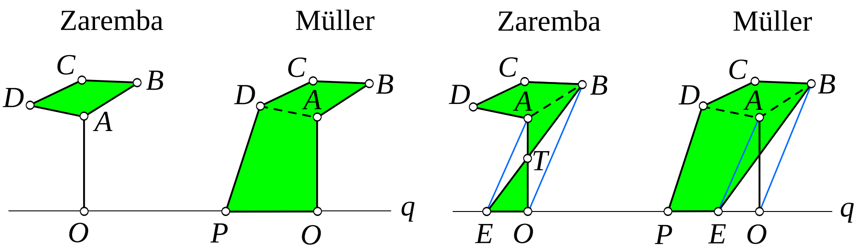
Uvedené měření lze upravit tak, abychom mohli číst velikost obsahu přímo na stupnici měřítka ploch. Stačí pozměnit postup, aby vznikl trojúhelník, který má libovolně zvolenou výšku.

Ze vztahu (1) plyne, že při volbě $v = 2$ je $S = z$. Obsah pak udává délka základny na stupnici měřítka. Dokonce můžeme k používané mapě zvolit výšku v tak, aby nejmenší dílek stupnice měřítka ploch představoval jeden hektar měřeného pozemku, nebo jeho dekadický násobek.

Postup, který uvedeme, užíval Zaremba i Gangloff. Oba prováděli měření stejně, Zaremba jej zdůvodnil v [9]. Ganglof u svých vynálezů publikoval jen popis přístroje a návod k obsluze. Důkaz Gangloffova postupu měření uvedl až Müller, viz [6] nebo [7]. Nevíme, zda jej od Gangloffa převzal. Obě zdůvodnění si ukážeme na příkladu určení obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Na počátku měření umístíme planimetr tak, aby jeho rameno procházelo vrcholem A, bylo kolmé k hraně měřítka, a aby byla délka úsečky OA rovna zvolené výšce v hledaného trojúhelníku (obr. 4 vlevo).

Kvůli názornému zdůvodnění si Müller doplnil čtyřúhelník $ABCD$ na šestiúhelník $ABCDPO$, kde $P \in p$. Zaremba počáteční stav nedoplňoval, ale považoval útvar $ABCDAO$ za singulární šestiúhelník (míníme tím šestiúhelník $ABCDVO$, kde $V = A$; úsečka OA představuje jeho dvě sousední, avšak totožné strany). Oba pak pokračovali níže popsaným způsobem.



Obr. 4 První kroky Zarembova a Müllerova zdůvodnění postupu

Nejprve stanovili směr postupu měření po hranici útvaru. Zvolíme jej v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček), tedy přes vrcholy A, B, C a D v tomto pořadí.

První krok, otočení ramene z polohy OA do polohy OB a pak posunutí do polohy EA, zapíšeme $OA \to OB \to EA$.

Jak vidíme na obr. 4 vpravo, nahradil Müller šestiúhelník $ABCDPO$ pětiúhelníkem $BCDPE$ téhož obsahu. Při Zarembově postupu byl singulární šestiúhelník $ABCDAO$ nahrazen jiným neobvyklým útvarem, zkříženým šestiúhelníkem $BCDAOE$. Jeho strany AO a BE jsou zkřížené, protínají se v bodě T. Tím vzniká dojem, že obsah nezůstal konstantní, neboť

$$S_{BCDAOE} = S_{ABCD} + S_{TBA} + S_{TOE}.$$

Nutno si však uvědomit, že planimetr měří *orientovaný obsah.* Pokud směr postupu obrátíme, budeme ramenem posouvat v opačném směru a výsledná poloha ramene zobrazí obsah na opačné straně od jeho počáteční polohy. Orientovaný obsah značíme tučným písmenem $\mathbf{S}$ na rozdíl od neorientovaného obsahu S. Pro libovolný trojúhelník XYZ platí $S_{XYZ} = S_{XZY} > 0$, avšak $\mathbf{S}_{XYZ} = -\mathbf{S}_{XZY}$.

Zajímá-li nás orientovaný obsah zkříženého šestiúhelníku $BCDAOE$, musíme vzít v úvahu, že zkřížení ramen způsobí obrácení směru postupu. Máme-li zvolen směr postupu měření v pořadí E, B, C, D, A, O, je tento směr při procházení trojúhelníku TOE opačný, než směr odpovídající útvaru $TBCDA$. Víme, že

$$\mathbf{S}_{TOE} = -\mathbf{S}_{TBA},$$

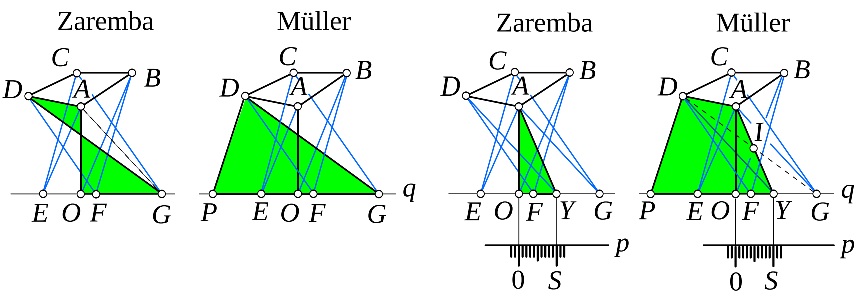
a proto platí

$$\mathbf{S}_{BCDAOE} = \mathbf{S}_{TBCDA} + \mathbf{S}_{TOE} = \mathbf{S}_{ABCD} + \mathbf{S}_{TBA} + \mathbf{S}_{TOE} = \mathbf{S}_{ABCD}.$$

Na obr. 5 vlevo vidíme situaci po dalších dvou krocích,

$$EA \to EC \to FB \quad \text{a} \quad FB \to FD \to GC.$$

V Müllerově případu jsme získali trojúhelník PGD. Ten ale nemá danou výšku v. Zarembův postup vedl ke zkříženému čtyřúhelníku $OADG$.



Obr. 5 K závěru Zarembova a Müllerova zdůvodnění postupu

Provedením posledního kroku, $GC \to GA \to YD$, obržíme u Zaremby trojúhelník AOY, jehož základna má délku $|OY| = S_{AOY} = S_{ABCD}$.

V Müllerově situaci nahradíme trojúhelník GDY trojúhelníkem ADY. Vznikne čtyřúhelník $ADPY$, který má s počátečním útvarem $ABCDPO$ společnou část $ADPO$. Po odečtení obsahu této části od obsahů S_{ADPY} a S_{ABCDPO} dojdeme k témuž výsledku $S_{ABCD} = S_{AOY} = |OY|$.

3. Historické poznámky

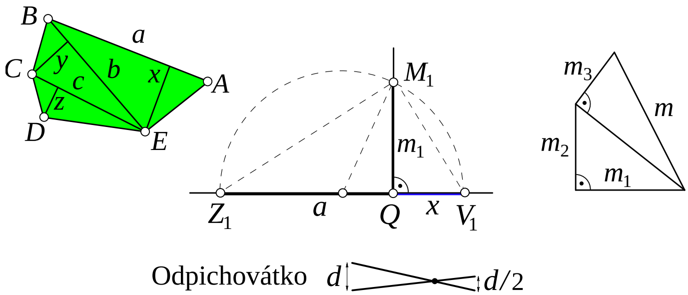
Předchůdcem Zarembova vynálezu byl *Kolbergův planimetr*[1)] z roku 1920 popsaný v polském lesnickém časopisu Sylwan [1]. Kolberg vycházel z poznatku, že pro obsah S trojúhelníku platí $2S = m^2$, kde $m = \sqrt{z \cdot v}$ je geometrický průměr základny a výšky. Jeho planimetr se skládal z tabulkového diagramu vyrytého do mosazné destičky a z dvojitého odpichovátka, které umožňovalo současně přenášet délku d i její polovinu (obr. 6 dole).

Pro určení obsahu Kolbergovou metodou zvolíme pětiúhelník $ABCDE$ na obr. 6. Pětiúhelník nejprve rozdělíme vhodně zvolenými úhlopříčkami na co nejmenší počet trojúhelníků, v nichž pak zvolíme základny a výšky. Geometrické průměry $m_1 = \sqrt{ax}$, $m_2 = \sqrt{by}$ a $m_3 = \sqrt{cz}$ sestrojíme s využitím odpichovátka a Eukleidovy věty o výšce postupem vyznačeným pro konstrukci úsečky m_1 na obr. 6 uprostřed.

K určení výsledného obsahu, který je dán vztahem

$$S = \frac{m^2}{2}, \quad \text{kde} \quad m = \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_1^2},$$

se využívala konstrukce na obr. 6 vpravo a diagram na tabulce planimetru.

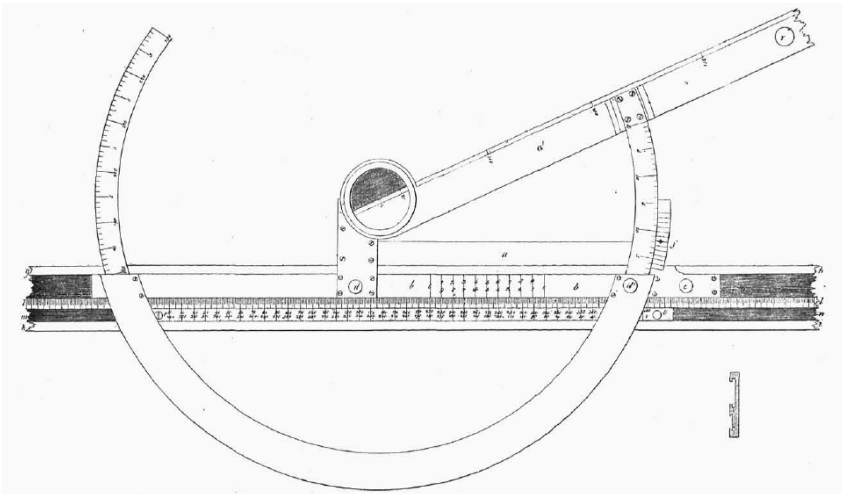


Obr. 6 Měření obsahu podle Kolberga

Jan Zaremba byl přísežný geometr knížete Adama Czartoryského. S podporou knížete sestrojil planimetr, který důkladně popsal v publikaci [9]. Ta rovněž obsahuje odborný posudek univerzitních profesorů Kolberga a Grabinského a List přiznání vynálezu vystavený Administrativní radou království. Publikace je na webu dostupná ve formátu pdf.

1) Kolberg se ve starších pramenech uvádí jako Colberg

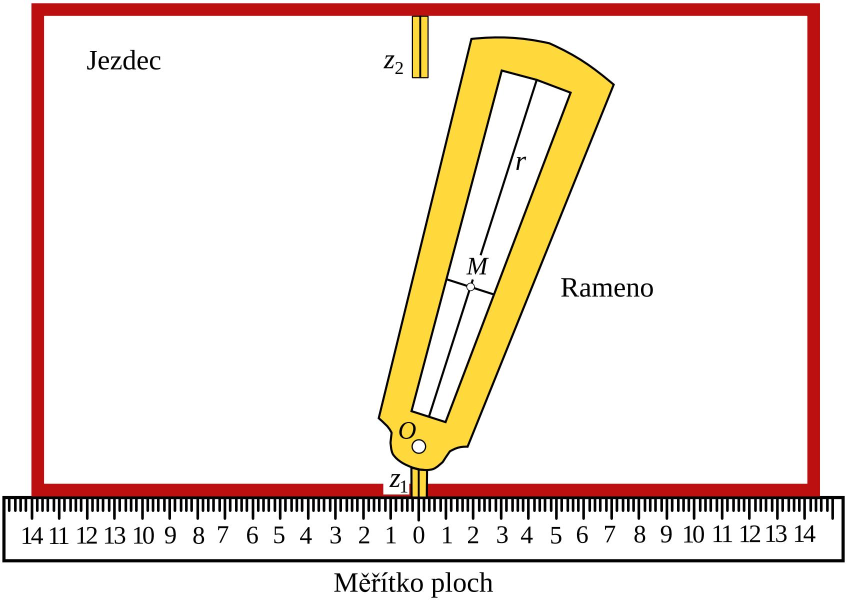
Kopii původního nákresu Zarembova planimetru představuje obr. 7. Přístroj byl vyroben z mosazi. Kruhový prstenec pevně spojený s ramenem byl opatřen stupnicí s noniem a umožňoval přesné nastavení směru ramene. Jezdec se pohyboval ve drážce a aretační šrouby umožňovaly zajistit polohu jezdce i ramene. Stupnice měřítka ploch byla vybavena noniem a na posouvatelné liště měla dvojí číslování (zleva doprava a zprava doleva), aby si uživatel mohl podle potřeby nastavovat počátek a pohodlně odečítat délku jedním, nebo druhým směrem.



Obr. 7 Zarembův planimetr

Karel Gangloff, nadlesní v Rožmitále pod Třemšínem, absolvoval jednoroční kurz na pražské polytechnice. Protože byl autorem celé řady užitečných vynálezů, nazývali jej jeho současníci *Český Archimédés*.

Gangloffův planimetr byl podstatně jednodušší, dal se snadno a levně vyrobit. Jeho první verze (1856) je znázorněna na obr. 8. Měřítkem ploch bylo samostatné pravítko, jehož stupnice má stejné číslování na obě strany od nuly umístěné uprostřed. Jezdec se skládal ze skleněné desky o rozměrech 42×26 cm. Rameno tvořila žíně r napjatá v rámu otáčivě připevněném k desce jezdce v bodě O. Ryska z_1 ukazovala polohu bodu O na stupnici a ryska z_2 sloužila k nastavení vlákna r do polohy kolmé na hranu pravítka. V rámu ramene byla ještě jedna napjatá žíně, která protínala žíni r v bodě M tak, aby $|OM|$ byla zvolenou výškou v výsledného trojúhelníku.



Obr. 8 Gangloffův planimetr

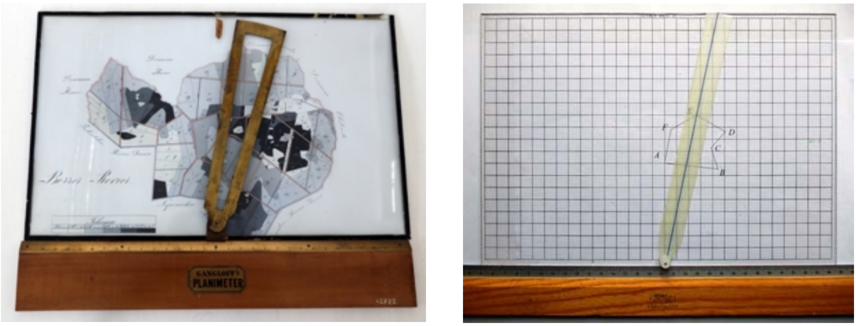
O Gangloffovi je známo, že své vynálezy neustále zlepšoval. Jeho planimetr z roku 1876 znázorňuje obr. 1. Rameno, jež vyrobil ve tvaru kovové pásky, mělo pět rysek určujících bod M pro mapy různých měřítek a pro měření jak ve starých rakouských jednotkách, tak i v nově zavedené metrické soustavě, viz [3].

Když roku 1877 popsal vídeňský profesor Josef Schlesinger své vynálezy, tachygraf a tachygrafický planimetr v rozsáhlé publikaci [8], reagoval na to prof. František Müller článkem [7]. Ukázal, že Gangloffův i Schlesingerův planimetr jsou v podstatě stejné, a že objev přísluší Gangloffovi, neboť je jeho vynález o 21 let starší. Prioritu vynálezu přiřadil Gangloffovi i ve své významné učebnici [6] a z těchto pramenů se poznatek zřejmě dostal do encyklopedií a navazujících prací.

Kolem roku 1908 se s Müllerovým článkem seznámil mladý polský astronom Lucjan Grabowski, který tehdy působil jako stipendista v Německu. Aby uvedl věci na pravou míru, sepsal v němčině článek [4] o polských vynálezech planimetrů. Ukázal, že principiálně stejný planimetr sestrojil Zaremba o 27 let dříve než Gangloff. Článek tehdy ještě neznámého vědce byl zapomenut.

Planimetr s úpravou pro měření popsané v odstavci 2 vyráběla v sedmdesátých letech 19. století německá firma Mechaniker Sickler v Karlsruhe. Bývá označován jako planimetr Dasnoyův, viz [2] a [6].

Kromě Schlesingera si podobné planimetry nechal patentovat Hieronymus Totsching z Insbruku (1905 a 1919). Gangloff se v době Zarembova objevu učil lesníkem nedaleko hranice s Polskem. Nevíme, zda Zarembův vynález znal, nebo zda planimetr objevil nezávisle na něm. Žádost o patent pravděpodobně nepodal.



Obr. 9 Gangloffův planimetr, originál a model

4. Námět pro zájmovou práci

Model Gangloffova planimetru z obr. 9 vpravo si můžeme snadno pořídit. Za měřítko ploch zvolíme delší pravítko a jako jezdec poslouží obdélníková plastová destička. Při jejím dolním středu vyvrtáme otvor o průměru 1 mm, provlečeme jím stejně silný hřebíček a na něj nasadíme rameno vystřižené z tvrdší plastové podložky na psaní. Osu ramene narýsujeme permanentním fixem. Na jejím dolním konci je třeba vyvrtat otvor pro otáčivé připojení k jezdci. Po nasazení ramene narazíme na hřebík včelařský mezerníček (nebo jiný vhodný objekt), aby části držely pohromadě.

Planimetry lze vyrobit svépomocí a práci s nimi bychom měli zaměřit na rozvoj geometrického myšlení. Metodické rozpracování nechávám na učiteli. Doporučoval bych nejprve směrovat studenty k nalezení postupu z odstavce 1. Můžeme začít obecným čtyřúhelníkem nebo pětiúhelníkem a rameno planimetru opatřit stupnicí. Nechat žáky, zda sami objeví nějaký postup měření obsahu. Pokud budou neúspěšní, zvolíme vhodnou nápovědu. Po zvládnutí základů lze procvičit složitější situace. Řešit úlohu, je-li při počáteční poloze pouze jeden vrchol útvaru na přímce q. Seznámit s pojmem orientovaného obsahu a metodou jeho přímého měření. Řešit problém, jak jedním měřením nalézt součet nebo rozdíl obsahů dvou mnohoúhelníků, je-li jeden mnohoúhelník vně (nebo uvnitř) druhého, apod.

Model planimetru lze též vytvořit v dynamické geometrii a výuku provádět pouze na počítači, bez použití mechanických pomůcek. Případně můžeme vyzkoušet obojí a uvést i něco z historie.

Literatura

[1] *Colberg, P. J.*: Opisanie składu i użycia Planimetru. Sylwan 1820, č. 2, s. 34–54.

[2] *Doll, M.*: Instrument zur Verwandlung von Vielecken in Dreiecke durch Parallelabschieben. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1874, s. 83–85.

[3] *Gangloff, K.*: Jednoduchý planimetr. Lesní a lovčí kalendář, roč. 12 (1878), s. 17–21, Český spolek lesnický, Praha, 1878.

[4] *Grabowski, L.*: Über einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere über das Planimeter von Zareba. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1908, s. 70–74 a 108–112.

[5] *Kucharzewski, F.*: Planimetry polskie i ich wynalazcy. Warszawa, 1902.

[6] *Müller, F.*: Kompendium geodésie a sférické astronomie, II. díl. Nákladem České matice technické, Praha, 1899.

[7] *Müller, F.*: Die Planimeter von Gangloff und Schlesinger. Zeitschrift für Vermessungswesen, roč. 8 (1879), s. 150–169.

[8] *Schlesinger, J.*: Der geodätische Tachygraph und der Tachygraph-Planimeter. Wien, 1877.

[9] *Zaręba, J.*: Planimetr, narzędzie jeometryczne. Tiskárna Puławy, 1829.