Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 261 a 262 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 261

Dokažte, že desítkový zápis některé přirozené mocniny čísla 2021 začíná čtyřčíslím 2020.

Pavel Calábek

Úloha 262

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice, která prochází vrcholy A a B daného čtyřúhelníku, protíná jeho úhlopříčky AC, BD po řadě ve vnitřních bodech K, L. Polopřímky AL a BK protínají kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě v bodech P $(P \neq A)$ a Q $(Q \neq B)$. Dokažte, že přímky CD a PQ jsou rovnoběžné.

Jaroslav Švrček

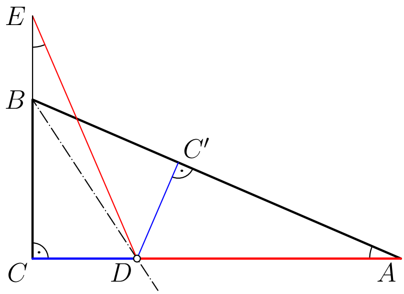
Dále uvádíme řešení úloh 257 a 258, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (28.) ročníku našeho časopisu.

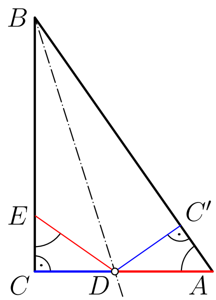
Úloha 257

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB protíná osa vnitřního úhlu u vrcholu B odvěsnu AC v bodě D. Nechť E je bod polopřímky CB pro který platí $|AD| = |DE|$. Dokažte, že body A, B, D, E leží na téže kružnici.

Robert Geretschläger & Jaroslav Švrček

Řešení. Označme C' patu kolmice z bodu D na přeponu AB. Jelikož BD je osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu B, je bod C' obrazem bodu C v souměrnosti podle osy BD a platí tak $|CD| = |C'D|$. Ze zadání plyne $|AD| = |DE|$. Pravoúhlé trojúhelníky CDE a $C'DA$ se tak shodují v přeponě a jedné z odvěsen, podle věty *Ssu* jsou shodné a shodují se tedy i ve vnitřních úhlech při vrcholech E a A.





Pokud je bod B bodem úsečky CE (obr. vlevo), je vidět úsečka BD z bodů E a A pod stejným úhlem a body A, B, D, E leží na téže kružnici. Naopak, pokud je bod E bodem úsečky CB (obr. vpravo), je ve čtyřúhelníku $EDAB$ součet velikostí vnitřních úhlů u protějších vrcholů E a A roven $180°$, odkud opět plyne dokazované tvrzení.

Jiné řešení. Podle věty o mocnosti bodu ke kružnici stačí dokázat rovnost

$$|CD| \cdot |CA| = |CB| \cdot |CE|.$$

Při obvyklém značení stran trojúhelníku ABC máme $|CA| = b$, $|CB| = a$. Osa úhlu dělí protější stranu v poměru přilehlých stran, platí tak

$$|CD| = \frac{ab}{a+c}, \qquad |DE| = |AD| = \frac{bc}{a+c}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku CDE podle Pythagorovy věty dostaneme

$$|CE| = \sqrt{|DE|^2 - |CD|^2} = \sqrt{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2} = \tag{1}$$

$$= \frac{b}{a+c}\sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a+c}. \tag{2}$$

Platí tak

$$|CD| \cdot |CA| = \frac{ab^2}{a+c} = |CB| \cdot |CE|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Úloha 258

Dokažte, že pro libovolné reálné číslo x platí nerovnost

$$x^4 + 2x + 1 \geq x^2(2x + 1).$$

Pro která x nastane rovnost?

Robert Geretschläger

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \geq 0,$$

která platí, protože postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} &x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = \\ &\qquad = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = (x^2 - x - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

jelikož druhá mocnina reálného čísla je nezáporná.

Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $x^2 - x - 1 = 0$, tj. právě když

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Jiné řešení (*podle Piotra Kulisze*). Ekvivalentní nerovnost

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

zřejmě platí pro $x = 0$. Pokud $x \neq 0$, můžeme obě strany dané nerovnosti dělit číslem x^2 a její levou stranu pak upravit do tvaru

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 = \left[\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1\right]^2.$$

Uvedený výraz na levé straně nabývá výhradně nezáporných hodnot, proto daná nerovnost platí. Stejně jako v předcházejícím řešení najdeme body, ve kterých nastává rovnost.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci.

Pavel Calábek