Příloha časopisu
MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Ročník 29 (2020), číslo 2

Úlohy I. kola (domácí část) 70. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

A–I–1

Na tabuli jsou napsána (ne nutně různá) prvočísla, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete všechna napsaná prvočísla, pokud jich je a) pět; b) sedm.

(*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

A–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží na straně BC body D a E tak, že D je mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Bod F je takový bod, že $FD \parallel AB$ a $FE \parallel AC$. Dokažte, že $|FB| = |FC|$.

(*Patrik Bak*)

A–I–3

Jsou-li a, b, c navzájem různá kladná reálná čísla, jaký je nejmenší možný počet různých čísel mezi čísly $a + b$, $b + c$, $c + a$, ab, bc, ca, abc?

(*Patrik Bak*)

A–I–4

Největšího dělitele d přirozeného čísla $n > 1$ s vlastností $d < n$ nazveme jeho *superdělitelem*.

(i) Dokažte, že dané přirozené číslo $d > 1$ je superdělitelem jen konečně mnoha čísel.

(ii) Označme $s(d)$ součet všech čísel, jejichž superdělitelem je dané číslo $d > 1$. Rozhodněte, zda existuje liché číslo $d > 1$ takové, že $s(d)$ je násobkem čísla 2 020.

(*Michal Rolínek*)

A–I–5

V trojúhelníku ABC označme S_a, S_b, S_c postupně středy jeho stran BC, CA, AB. Dokažte, že pro libovolný bod X různý od bodů S_a, S_b, S_c platí

$$\min\left\{\frac{|XA|}{|XS_a|}, \frac{|XB|}{|XS_b|}, \frac{|XC|}{|XS_c|}\right\} \le 2.$$

(*Patrik Bak*)

A–I–6

Mějme 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?

(*Martin Melicher*)

KATEGORIE B

B–I–1

Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvoumístná čísla.)

(*Jaroslav Zhouf*)

B–I–2

Jaká je největší možná hodnota výrazu

$$xy - x^3y - xy^3,$$

jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje?

(*Mária Dományová, Patrik Bak*)

B–I–3

V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že platí $|DE| = |AA'|$.

(*Patrik Bak*)

B–I–4

Zjistěte, pro které hodnoty reálného parametru k má soustava rovnic

$$\begin{aligned} |x+6| + 2|y| &= 24, \\ |x+y| + |x-y| &= 2k \end{aligned}$$

lichý počet řešení v oboru reálných čísel.

(*Pavel Calábek*)

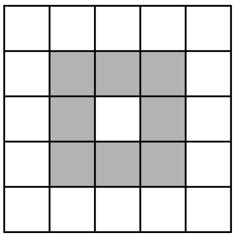
B–I–5

Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice k přímce DE procházející bodem D protíná přímky CG a AB postupně v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

(*Marián Poturnay*)

B–I–6

Na plánu o rozměrech 12×12 čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?



(*Jozef Rajník*)

KATEGORIE C

C–I–1

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a.

(*Jaroslav Švrček*)

C–I–2

Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku a v každém sloupci byl roven 0.

(*Ján Mazák*)

C–I–3

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme po řadě I a U střed kružnice mu vepsané a dotykový bod této kružnice s odvěsnou BC. Určete, jaký je poměr $|AC| : |BC|$, jsou-li úhly CAU a CBI shodné.

(*Jaroslav Zhouf*)

C–I–4

Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

jsou-li a, b, c kladná reálná čísla se součtem 1.

(*Michal Rolínek, Pavel Calábek*)

C–I–5

Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T. Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.

(*Tomáš Jurík*)

C–I–6

Na tabuli je napsáno několik přirozených čísel od 1 do 100, přičemž žádné z nich není dělitelné dvoumístným prvočíslem a součin žádných dvou z nich není druhou mocninou přirozeného čísla.

a) Určete největší možný počet čísel na tabuli.

b) Určete největší možný součet čísel na tabuli.

(*Jaromír Šimša*)