MATEMATIKA

Pravidelný sedmnáctiúhelník

MARIE CHODOROVÁ – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Přesné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků pomocí pravítka a kružítka jsou poměrně známé, s některými z nich se seznámí žáci již na základní škole. Mnohdy se však např. při výuce matematiky či deskriptivní geometrie mezi žáky SŠ a posluchači VŠ objeví pochybnosti, zda známá konstrukce pravidelného pětiúhelníku, viz např. [2] nebo [6], je přesná či pouze přibližná. Vyčerpávající odpověď na otázku, které pravidelné n-úhelníky lze zkonstruovat eukleidovsky (pomocí pravítka a kružítka) přesně, dává níže uvedená Gaussova věta.[1)]

Kromě trojúhelníku a pětiúhelníku je dalším pravidelným n-úhelníkem s prvočíselnou hodnotou n, který lze přesně eukleidovsky zkonstruovat, právě až sedmnáctiúhelník. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře – zájemce o tuto problematiku – s jednou konstrukcí pravidelného sedmnáctiúhelníku.

Věta 1 (Gaussova)
Pravidelný n-úhelník lze zkonstruovat eukleidovsky, právě když pro počet n ($n \geq 3$) jeho vrcholů platí $n = 2^i p_1 p_2 \ldots p_j$, kde i, j jsou celá nezáporná čísla a $p_1, p_2, \ldots, p_j$ jsou navzájem různá Fermatova prvočísla.

Poznámka. Fermatova čísla (prvočísla) jsou taková přirozená čísla (prvočísla), která lze zapsat ve tvaru $2^{2^s} + 1$, kde s je přirozené číslo (např. $17 = 2^{2^2} + 1$).

Po zveřejnění Gaussova výsledku se vyšetřování prvočíselnosti Fermatových čísel stalo poměrně důležitým úkolem, na němž začalo pracovat

[1)] Johann Carl Friedrich Gauss, německý matematik a fyzik (* 30. 4. 1777 v Braunschweigu, † 23. 2. 1855 v Göttingen).

mnoho matematiků. Jak se později ukázalo, nešlo o snadný úkol. Fermatových prvočísel je doposud známo pouze pět, a to pro $s = 0, 1, 2, 3, 4$, pro $s = 5$ je však číslo $2^{2^5} + 1$ dělitelné prvočíslem 641. Další Fermatova prvočísla patrně neexistují. Dosud jsou prozkoumaná Fermatova čísla do hodnoty $s = 32$, kdy pro $s = 5, 6, \ldots, 32$ je známo, že se jedná vesměs o čísla složená.

Připomeňme ještě, že zhruba před 2000 lety *Eukleidés z Alexandrie* (cca 325 př. n. l. – cca 260 př. n. l.) věděl, že pomocí pravítka a kružítka lze přesně zkonstruovat pravidelné mnohoúhelníky s n ($n \geq 3$) vrcholy, kde $n = 2^i 3^j 5^k$, přičemž i, j, k jsou celá nezáporná čísla.

Úlohu „sestrojit pravidelný n-úhelník" lze převést na (totožnou) úlohu „rozdělit kružnici na n stejných částí". Při konstrukci pravidelných mnohoúhelníků tak můžeme názorně poukázat na propojení algebry a eukleidovské geometrie, neboť obrazy komplexních čísel v Gaussově rovině, jež jsou kořeny binomické rovnice $z^n - 1 = 0$, leží na jednotkové kružnici a rozdělí ji na n stejných částí (n shodných kružnicových oblouků). Sestrojit vrcholy pravidelného n-úhelníku je tedy v podstatě úlohou o nalezení kořenů binomické rovnice. V praxi se často setkáváme s úlohou sestrojit pravidelný mnohoúhelník s daným poloměrem kružnice opsané či danou délkou strany. Zde pak využíváme stejnolehlosti. Již *R. Descartes* dokázal, že eukleidovskými konstrukcemi lze sestrojit složené výrazy obsahující operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a využití druhé odmocniny. Lze tudíž pravidelný n-úhelník zkonstruovat, právě když je poloha jeho vrcholů vyjádřena v Gaussově rovině algebraickými výrazy obsahujícími pouze tyto operace. Toto tvrzení dokázal *P. L. Wanzel* v 19. století, přičemž vycházel právě z výše zmíněného Descartesova důkazu.

Gauss sice konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku sám nepopsal, dokázal však následující větu udávající polohy vrcholů rovnostranného trojúhelníku, pravidelného pětiúhelníku a pravidelného sedmnáctiúhelníku (v souvislosti s polohou kořenů odpovídajících binomických rovnic na jednotkové kružnici), které jsou vyjádřeny výrazy zkonstruovatelnými pouze pomocí pravítka a kružítka.

Věta 2

Pro $\cos \frac{2\pi}{n}$ $(n = 3, 5, 17)$ platí rovnosti

a) $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$,

b) $\cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$,

c) $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}\right)+$

$$+\,2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}-2\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}}.$$

Důkaz provedeme podrobně pro případy $n = 3$ a $n = 5$. Hledáme tedy kořeny binomických rovnic $z^3 - 1 = 0$ a $z^5 - 1 = 0$.

Kořeny binomické rovnice $z^n - 1 = 0$ můžeme vyjádřit jako komplexní čísla v goniometrickém tvaru $z_k = \cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi$ pro $k = 0, \ldots, n-1$, kde $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Z Viètových vzorců plyne, že součet všech kořenů této rovnice je roven nule, tj. $z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} = 0$. Z rozkladu

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \ldots + z + 1) = 0$$

plyne $z_0 = 1$, a tedy

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} = -1. \tag{1}$$

Pro n liché jsou kořeny z_k a z_{n-k} $(k = 1, \ldots, n-1)$ komplexně sdružená čísla, a pro jejich součet proto platí

$$z_k + z_{n-k} = 2\cos k\varphi. \tag{2}$$

ad a) Snadno se vidí, že pro $n = 3$ je $z_0 = 1$, $z_1 + z_2 = -1$ a také $z_1 + z_2 = 2\cos\varphi$. Odtud dostáváme $2\cos\varphi = -1$ a po dosazení za $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ obdržíme přímo $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, což představuje známou skutečnost.

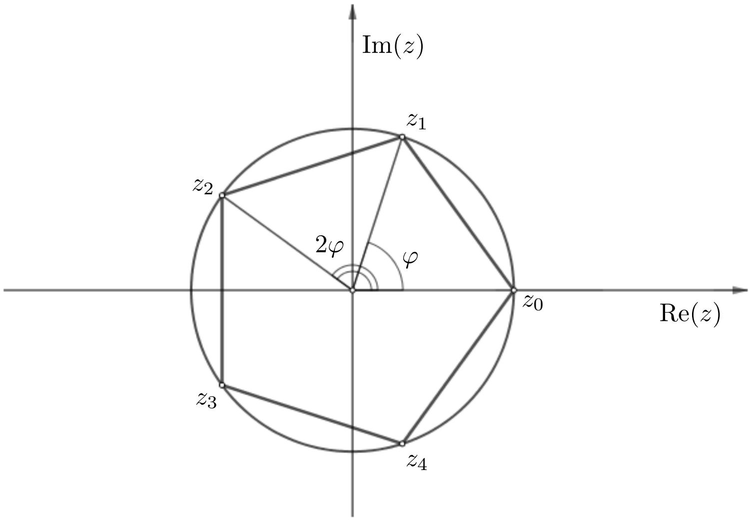
ad b) Podobně pro $n = 5$ z rozkladu

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

plyne, že $z_0 = 1$, tedy $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$, kde z_1 a z_4, resp. z_2 a z_3, jsou komplexně sdružená čísla. Označme dále

$$\begin{aligned} v_1 &= z_1 + z_4,\\ v_2 &= z_2 + z_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Užijeme-li (2), platí $v_1 = 2\cos\varphi$, $v_2 = 2\cos 2\varphi$. Vzhledem k tomu, že $\varphi = \frac{2\pi}{5}$, platí pro hodnoty v_1 a v_2 nerovnost $v_2 < 0 < v_1$.



Obr. 1

Pokud najdeme takovou kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla v_1, v_2, má tato rovnice užitím Viètových vztahů tvar

$$x^2 - (v_1 + v_2)x + v_1 v_2 = 0.$$

Z (3) přitom plyne $v_1 + v_2 = -1$.

Dále určíme hodnotu součinu v_1, v_2. Nejprve připomeňme následující goniometrickou identitu. Pro libovolné argumenty α, β platí známá identita, kterou následně využijeme.

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta). \tag{4}$$

Užitím (1), (2), (3) a (4) postupně upravujeme

$$v_1 v_2 \overset{(3)}{=} 4\cos\varphi\cos 2\varphi \overset{(4)}{=} 2(\cos 3\varphi + \cos\varphi) \overset{(2)}{=} (z_3 + z_2) + (z_1 + z_4) \overset{(3)}{=}$$

$$= v_1 + v_2 \overset{(3)}{=} -1.$$

Čísla v_1, v_2 jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 1 = 0$, tj.

$$v_1 = 2\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right), \qquad v_2 = 2\cos 2\varphi = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right),$$

přičemž $\varphi = \frac{2\pi}{5}$. Tím jsme dokázali druhou z rovností uvedenou ve větě 2.

ad c) Analogicky lze odvodit také případ $n = 17$, který zde však pro jeho větší rozsah a technickou náročnost nebudeme uvádět. Lze jej nalézt např. v [3].

Naznačíme jen odvození třetího vztahu z věty 2 a následně uvedeme také konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku, která je popsána např. v [4].

Označme S součet následujícího výrazu:

$$S = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos k\varphi, \tag{5}$$

kde k je libovolné přirozené číslo a připomeňme další známou goniometrickou identitu, která je splněna pro všechny reálné argumenty α, β

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{6}$$

Obě strany rovnosti (5) nejprve vynásobíme číslem $2\sin\frac{\varphi}{2}$ a dostaneme

$$2S\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + 2\cos 2\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + 2\cos 3\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + \ldots + 2\cos k\varphi\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Na jednotlivé sčítance na pravé straně součtu uplatníme nyní vztah (6).

$$2S\sin\tfrac{\varphi}{2} = (\sin\tfrac{3}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi) + (\sin\tfrac{5}{2}\varphi - \sin\tfrac{3}{2}\varphi) + (\sin\tfrac{7}{2}\varphi - \sin\tfrac{5}{2}\varphi) + \ldots$$

$$\ldots + (\sin(k+\tfrac{1}{2})\varphi - \sin(k-\tfrac{1}{2})\varphi) = \sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Závěrem opět použijeme identitu (6) a po úpravě dostaneme

$$S = \frac{\cos\frac{1}{2}(k+1)\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}k\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}. \tag{7}$$

Položíme-li ve vztazích (5) a (7) $k = 16$ a $\varphi = \frac{2\pi}{17}$, dostáváme

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos 16\varphi = -1.$$

Ze vztahu (2) plyne pro kosiny jednotlivých úhlů v sedmnáctiúhelníku rovnost

$$\cos\varphi = \cos 16\varphi,\ \cos 2\varphi = \cos 15\varphi,\ \ldots\ ,\ \cos 8\varphi = \cos 9\varphi, \tag{8}$$

tj.

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos 8\varphi = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Pro liché násobky φ tedy platí

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos 15\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Levou stranu poslední rovnosti rozložíme rozložíme na součet m a n, kde

$$\begin{aligned} m &= (\cos\varphi + \cos 13\varphi) + (\cos 9\varphi + \cos 15\varphi), \\ n &= (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) + (\cos 7\varphi + \cos 11\varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

Potom $m+n = -\frac{1}{2}$. Nyní určíme hodnotu součinu $m \cdot n$. S ohledem na (8) pak platí

$$\begin{aligned} m \cdot n \;=\; & (\cos\varphi + \cos 4\varphi + \cos 8\varphi + \cos 2\varphi) \cdot \\ & \cdot (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 6\varphi) = \\ =\; & \cos\varphi\cos 3\varphi + \cos\varphi\cos 5\varphi + \cos\varphi\cos 7\varphi + \cos\varphi\cos 6\varphi + \\ & + \cos 4\varphi\cos 3\varphi + \cos 4\varphi\cos 5\varphi + \cos 4\varphi\cos 7\varphi + \cos 4\varphi\cos 6\varphi + \\ & + \cos 8\varphi\cos 3\varphi + \cos 8\varphi\cos 5\varphi + \cos 8\varphi\cos 7\varphi + \cos 8\varphi\cos 6\varphi + \\ & + \cos 2\varphi\cos 3\varphi + \cos 2\varphi\cos 5\varphi + \cos 2\varphi\cos 7\varphi + \cos 2\varphi\cos 6\varphi. \end{aligned}$$

Použitím rovnosti (4) na každý ze šestnácti sčítanců na pravé straně předešlé rovnosti a následným využitím (9) již přímo obdržíme

$$m \cdot n = 2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos 8\varphi) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Čísla m a n jsou tudíž kořeny kvadratické rovnice $2x^2 + x - 2 = 0$, pro něž platí

$$m = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1); \quad n = -\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1). \tag{11}$$

Položíme-li $m = \operatorname{cotg}\alpha$, kde α je vhodné reálné číslo, je zřejmě $n = -\operatorname{tg}\alpha$.

Označme nyní

$$p = \cos\varphi + \cos 13\varphi, \quad q = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi, \tag{12}$$

$$r = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi, \quad s = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi. \tag{13}$$

Opětovným použitím vztahů pro součin dvou kosinů (4) dostaneme

$$2pq = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos 8\varphi = -\frac{1}{2},$$

tj. $pq = -\frac{1}{4}$ a podobně $rs = -\frac{1}{4}$.

Kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou p, q, má tedy tvar

$$4x^2 - 4mx - 1 = 0, \tag{14}$$

podobně, kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou r, s, má tvar

$$4x^2 - 4nx - 1 = 0. \tag{15}$$

Z rovnice (14) získáme následně kořeny ve tvaru

$$p = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{\tfrac{1}{4}(m^2+1)} = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$q = \tfrac{1}{2}m - \sqrt{\tfrac{1}{4}(m^2+1)} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

přičemž kořen p je kladný, neboť jak $\cos\varphi$, tak $\cos 13\varphi$ jsou kladná čísla.

Analogicky pro kořeny rovnice (15) platí

$$r = \tfrac{1}{2}n + \sqrt{\tfrac{1}{4}(n^2+1} = \tfrac{1}{2}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$s = \tfrac{1}{2}n - \sqrt{\tfrac{1}{4}(n^2+1)} = -\tfrac{1}{2}\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

První z rovností ve vztahu (12) lze také zapsat využitím (2) ve tvaru $\cos\varphi + \cos 4\varphi = p$. Aplikujeme-li (4) na první rovnost v (13) získáme $\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = 2\cos\varphi \cdot \cos 4\varphi = r$, tj.

$$\cos\varphi + \cos 4\varphi = \tfrac{1}{2}\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos\varphi \cdot \cos 4\varphi = \tfrac{1}{4}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Položíme-li $2\cos\varphi = w_1$ a $2\cos 4\varphi = w_2$, jsou hodnoty w_1 a w_2 kořeny kvadratické rovnice

$$w^2 - w\ \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0. \tag{16}$$

Jejím řešením zjistíme, že kořen $w_1 = 2\cos\varphi = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ je dvojnásobkem hodnoty třetího vztahu z věty 2.

V článku [4] je provedena jiná úvaha, která vede k efektivnější konstrukci sedmnáctiúhelníku a která umožní stanovit postup, jak sestrojit úhel φ (a některé jeho násobky) na jednotkové kružnici:

Uvažujme kružnici k se středem v počátku kartézského souřadnicového systému a poloměrem 1, tj. kružnici vyhovující rovnici

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{17}$$

a dále dvě přímky

$$y = -w_i(x-1),\ \ i = 1, 2, \tag{18}$$

kde $w_1 = 2\cos\varphi$ a $w_2 = 2\cos 4\varphi$, které procházejí bodem $A = [0;1]$ kružnice k. Tyto přímky protínají kružnici k (kromě bodu A) ještě v bodech I, J (obr. 2). Rovnici přímky $u = IJ$, která prochází těmito body, lze zapsat v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{19}$$

kde a, b jsou vhodná nenulová reálná čísla. Dosadíme-li do (19) $y = w(x-1)$ (viz vztah (18)), pak po úpravě dostáváme

$$x = \frac{a(w-b)}{aw-b},$$

tj.

$$y = \frac{b(a-1)w}{aw-b}$$

Tyto výrazy dosadíme za x a y do (17) a po elementárních úpravách získáme kvadratickou rovnici o neznámé w

$$w^2 - w\frac{2a}{b(a-1)} + \frac{a+1}{a-1} = 0,$$

ve které nyní položíme

$$\frac{2a}{b(a-1)} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad \frac{a+1}{a-1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{1+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}, \tag{20}$$

což je zřejmě rovnice (16).

Dále současně platí

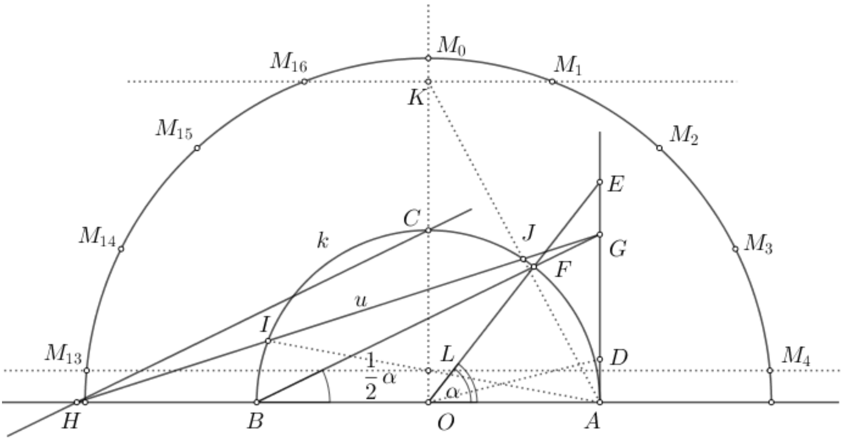
$$a = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{2}{1+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Rovnice přímky u je ve tvaru

$$2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - y\left(1 + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right) + 2 = 0,$$

pro její sestrojení lze použít úsečku délky $|a|$ a bod $G = [1; 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}]$.

Popis konstrukce je tedy následující, viz obr. 2:



Obr. 2

- Sestrojíme jednotkovou polokružnici k se středem O, viz (17), průměr označíme AB. Středem O polokružnice vedeme kolmici k přímce AB, průsečík této kolmice s polokružnicí k označme C.
- Sestrojíme bod D, pro který platí $|AD| = \frac{1}{4}|OA|$ a $AB \perp AD$.
- Sestrojíme bod E na polopřímce AD, pro který platí $|DE| = |DO|$. Platí $|AE| = \frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1)$, viz (11), tedy velikost úhlu AOE je α a velikost úhlu ABF je $\alpha/2$, viz (20), kde bod F je průsečík polokružnice k s přímkou OE.
- Sestrojíme bod G na polopřímce AD, pro který platí $|AG| = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, viz (20). Vzhledem k tomu, že $|AB| = 2$, je AG odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku ABG, kde G je průsečík BF a AD.
- Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou BG, která protne přímku AB v bodě H, úsečka OH má velikost $|a|$, tj. $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ (ze vztahu (20) plyne $a = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$).

- Přímka HG (přímka u) protne kružnici k v bodech I, J.
- Body I, J promítneme z bodu A na přímku OC do bodů K, L, pro které platí $|OK| = w_1 = 2\cos\varphi$ a $|OL| = w_2 = 2\cos 4\varphi$, viz (18).
- Sestrojíme kružnici k' o poloměru 2 soustřednou s kružnicí k. Body K, L vedeme rovnoběžky s přímkou AB, které protínají kružnici k' v bodech M_1, M_4, M_{13}, M_{16}. Velikost úhlu KOM_1 je φ a velikost úhlu KOM_4 je 4φ. Našli jsme tedy hledaný úhel určený polohou bodů ma jednotkové kružnici a body M_1, M_4, M_{13}, M_{16} jsou tedy vrcholy hledaného sedmnáctiúhelníku.

Obdobným způsobem bychom mohli pokračovat pro velikosti úhlů 2φ a 8φ, 3φ a 5φ, 6φ a 7φ.

Tímto postupem lze tedy sestrojit vrcholy pravidelného sedmnáctiúhelníku s jednotkovou kružnicí opsanou. Pokud bychom chtěli sestrojit pravidelný sedmnáctiúhelník s kružnicí opsanou, která má jiný poloměr, stačí využít stejnolehlosti se středem O a (kladným) koeficientem různým od jedné.

Literatura

[1] *Bold, B.*: Famous Problems of Geometry and How to Solve Them. Dover Publications Inc., New York, 1982.

[2] *Fabián, J.*: Pětiúhelník. Nakladatelství Lupus, Trutnov, 2005.

[3] *Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.*: Kouzlo čísel. Academia, Praha, 2011.

[4] *Strnad, A.*: O sestrojování pravidelného sedmnáctiúhelníku, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 36 (1907), č. 1, s. 81–86.

[5] *Horáková, K.*: Eukleidovské a přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Bakalářská práce, PdF UK, Praha, 2013.

[6] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1985/86), č. 8, s. 524–527.