

krysy, zavlečené námořníky či kolonizátory, díky rychlému množení zdecimovaly místní populace ptáků, plazů či obojživelníků. V české krajině se v posledních letech objevují místa s lokálními populacemi vlků, kteří takto zaplňují volnou niku, vyvolávají však současně poměrně bouřlivé debaty mezi ekology a ochránci na jedné straně a myslivci a zemědělci na straně druhé.

Literatura

- [1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hrabo%C5%A1_poln%C3%AD
- [2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Prase_divok%C3%A9
- [3] https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlk_obecn%C3%BD
- [4] https://cs.wikipedia.org/wiki/Ekologick%C3%A1_nika
- [5] Kalas, J., Pospíšil, Z.: Spojité modely v biologii. Masarykova univerzita, Brno, 2001.

Hodnotiace prostriedky na formatívne hodnotenie vo vyučovaní matematiky

STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Snahy o skvalitnenie procesu učenia a zlepšenie učebných výsledkov vedú k hľadaniu a využívaniu rôznych foriem interakcií a dialógu medzi učiteľom a žiakom. Dôležitou podmienkou pre skvalitnenie a inováciu matematického vzdelávania je rozvíjanie profesionálnych kompetencií učiteľov matematiky. Medzi významné oblasti profesionálneho rozvoja učiteľa patrí využívanie rôznych stratégií učenia. Východiskom pre plánovanie a realizáciu výučby je identifikácia kritických miest vo vzdelávacom obsahu, získavanie informácií o učebných výsledkoch žiakov. Pre učiteľa to znamená snažiť sa preniknúť do myslenia žiakov, odhaľovať zdroje a príčiny neporozumenia a žiacke miskoncepce [1].

Zatiaľ čo vzdelávacie ciele a stratégie v mnohých európskych krajinách signalizujú vysokú úroveň pozornosti venovanej formatívne hodnoteniu, z niektorých krajín, medzi ktoré bola zaradená aj Slovenská republika, je len málo informácií o efektívnom a systematickom využívaní formatívneho hodnotenia na školách a v triedach [4]. V triednej praxi učitelia často využívajú sumatívne hodnotenie na stanovenie celkovej úrovne osvojenia vedomostí a zručností po ukončení výučby. Jeden z výsledkov sumatívneho hodnotenia je zaradenie výkonov žiakov do klasifikačných stupňov. Termín formatívne hodnotenie použil prvýkrát Bloom na odlíšenie priebežného hodnotenia v triede od záverečných súhrnných testov [9]. Formatívne hodnotenie je zamerané hlavne na priebežnú identifikáciu oblastí, ktoré si môžu vyžadovať zlepšenie, analýzu získaných informácií o procese učenia a prijatie rozhodnutí o ďalšom priebehu výučby. Wiliam [9] charakterizuje formatívne hodnotenie ako súbor procesov využívajúcich informácie o učebných výsledkoch žiakov, ich analýzu učiteľom, žiakom alebo jeho rovesníkmi a poskytovanie spätnej väzby za účelom usmerňovania a zlepšenia učenia. Pri formatívnom hodnotení učitelia získavajú informácie o aktuálnych vedomostiach žiakov a na základe týchto informácií majú zhodnotiť, či sú učebné postupy účinné, alebo či je potrebné ich pozmeniť, prípadne sa aj vrátiť k objasneniu niektorých pojmov a vzťahov. Formatívne hodnotenie možno charakterizovať ako dynamickú interakciu medzi učiteľom a žiakmi, ktorá v sebe zahŕňa plánovanie, vyučovanie a reflexiu výsledkov učenia za účelom prijatia lepších rozhodnutí o ďalšej výučbe [2]. Každé hodnotenie v triede môže plniť funkcie formatívneho hodnotenia, ak informácie o učení sa žiakov sú využívané na prispôsobenie ďalšej výučby potrebám a schopnostiam žiakov.

V štandardoch pre národné združenie učiteľov matematiky NCTM v USA [10] sa uvádza, že formatívne hodnotenie v sebe zahŕňa päť kľúčových stratégií.

1. Vysvetlenie učebných cieľov a kritérií pre hodnotenie učebných výkonov. Učitelia môžu rozobrať so žiakmi učebné ciele a hodnotiace kritériá na začiatku vyučovacej jednotky. Diskusia o ukazovateľoch výborných výkonov môže mať pozitívny vplyv na dosahovanie výborných učebných výsledkov. Porozumenie učebných cieľov a hodnotiacich kritérií môže pomôcť žiakom hodnotiť svoj vlastný učebný postup a porovnávať ho s požadovanými učebnými výkonmi. Na vymedzenie jednotlivých úrovní žiackych učebných výkonov možno využiť hodnotiace rubriky. Učitelia môžu pomocou rubriek zdieľať so žiakmi kritériá úspechu.

2. Využívanie učebných aktivít na získavanie informácií o učení sa žiakov. Pri analýze priebehu a výsledkov učebných aktivít by sa mal učiteľ snažiť porozumieť mysleniu žiakov a identifikovať prípadné miskoncepce. Pri plánovaní výučby by si mal učiteľ premyslieť, aké súvislosti, príklady a otázky využije pri sprístupňovaní novej témy. Dôležitým spôsobom na získavanie informácií o myslení žiakov, ale aj na stimulovanie myslenia, je kladenie otázok a organizovanie diskusie so žiakmi.

3. Poskytovanie spätnej väzby na usmerňovanie učenia. Učiteľ pri výučbe pozoruje prácu žiakov, zadáva otázky, počúva vysvetlenia žiakov, koriguje ich odpovede a usmerňuje ich činnosti pri učení. Vyjadrenie hodnotenia riešenia úloh v teste alebo v pracovnom liste pomocou bodov nemusí mať vplyv na zlepšenie učenia žiakov. Aby mala spätná väzba vplyv na zvýšenie výkonu žiaka, mala by byť konštruktívna. Učiteľ by sa mal snažiť poskytnúť žiakom konkrétne komentáre k chybám a aj návrhy, ako sa môžu zlepšiť. Efektívna spätná väzba by mala byť zameraná na konkrétne oblasti alebo činnosti, v ktorých by sa mal žiak zlepšiť. Pre zvýšenie efektívnosti spätnej väzby je dôležité, aby mal žiak čas na premyslenie svojho riešenia. Preto by spätná väzba nemala byť poskytovaná príliš rýchlo po zadaní úlohy, ale ani s väčším časovým odstupom, keď už žiak mohol zabudnúť hlavné myšlienky svojho riešenia.

4. Nabádanie žiakov na hodnotenie ich vlastného učenia sa. Zapojenie žiakov do hodnotenia svojho učenia môže byť premietnuté do zlepšenia ich učebných výsledkov. Sebahodnotenie má podnecovať žiaka, aby sa zamyslel nad osvojenými poznatkami, nad tým, ako porozumel nové pojmy, vzťahy a ako vníma ich súvis so skôr osvojenými poznatkami. Hodnotenie svojho učenia je základným prvkom metakognície. Zlepšovanie žiakov v oblasti metakognície je dôležitým predpokladom pre hlbšie porozumenie vzdelávacieho obsahu a lepšie riadenie svojho učenia.

5. Zapojenie žiakov do vzájomného učenia. Žiaci môžu zohrávať dôležitú úlohu pri zlepšovaní učebných výkonov svojich spolužiakov. Pre žiaka môže byť jednoduchšie a pohodlnejšie žiadať o pomoc a vysvetlenia svojho spolužiaka ako učiteľa. Na druhej strane musí žiak pri objasňovaní svojich riešení spolužiakom hľadať vhodné vysvetlenia a argumenty. Pre podporu vzájomného učenia je vhodné skupinové vyučovanie. Aby skupinové vyučovanie mohlo byť efektívne, mali by byť presne stanovené skupinové ciele a úlohy pri organizovaní skupinovej práce, aby každý žiak pociťoval zodpovednosť za prácu skupiny.

Bežným postupom na zisťovanie spôsobov rozmýšľania žiaka a miery jeho porozumenia základných pojmov a vzťahov je kladenie otázok. Podľa Freia a Fishera [3] možno rozlíšiť niekoľko základných typov otázok:

- otázky na opakovanie sú zamerané na skôr naučené poznatky a predchádzajúce skúsenosti,
- otázky k vypracovaniu riešenia úlohy nabádajú žiakov k opísaniu ich nápadov na riešenie predloženej úlohy,
- otázky na objasnenie požadujú od žiakov, aby objasnili a vysvetlili svoje riešenia,
- otázky na reflexiu podnecujú žiakov k vysvetľovaniu svojich názorov a vlastných pohľadov na svoje riešenia alebo na riešenia svojich spolužiakov.

Pri diagnostikovaní porozumenia pojmov a vzťahov a pri identifikovaní miskoncepcií majú dôležité postavenie otázky na porozumenie základného konceptu, ktoré možno označovať ako konceptuálne otázky. Otázky tohto typu je vhodné používať aj pri formatívnom hodnotení.

Návrh prostriedkov na formatívne hodnotenie

Viacerí autori vo svojich publikáciách [5, 6, 7, 8] opisujú konkrétne formy prostriedkov na formatívne hodnotenie. Niektoré z opisovaných prostriedkov sa odlišujú len v malých detailoch. V článku sme sa nesnažili demonštrovať veľký počet prostriedkov na formatívne hodnotenie, ale vybrali sme na ukážku len niekoľko základných typov, ktoré podľa nášho názoru možno vhodne využiť vo vyučovaní matematiky. Úlohy na formatívne hodnotenie môžu byť založené na rozhodovaní o pravdivosti výrokov, modifikovaní výrokov, aby boli pravdivé, hľadanie chýb v postupoch riešení úloh, alebo v rozhovoroch medzi dvoma žiakmi (môžu v nich byť zapracované typické chyby žiakov), výber správnych grafov podľa slovného opisu alebo predpisu funkcie, priradovanie kartičiek obsahujúcich rôzne reprezentácie pojmov a vzťahov, a pod.

Vybrané typy prostriedkov na formatívne hodnotenie:

Model Frayer využíva grafickú schému na prehľadné usporiadanie definície a významu pojmov. Žiak nemá preukázať len zapamätanie definície a vlastností pojmov, ale má sa zamyslieť aj nad hľadaním vhodných príkladov a protipríkladov. Tento model umožňuje diagnostikovať porozumenie konceptu základných pojmov a vzťahov. Na obr. 1 je znázornený model Frayer pre pojem rovnobežník.

Priezvisko:		Trieda:	Dátum:
Definícia:		Vlastnosti rovnobežníkov:	
Tri príklady na špeciálne typy rovnobežníkov:		Tri protipríklady:	

Obr. 1 Model Frayer pre pojem rovnobežník

Komentovaný náčrt využíva grafickú reprezentáciu objektov a vzťahov. Žiaci sú vyzvaní, aby svoje úvahy vyjadrili graficky. Pri vypracovaní zadania sa môže od žiakov vyžadovať vytvorenie alebo doplnenie náčrtu, označenie a stručné vysvetlenie jednotlivých častí náčrtu. Náčrt sa môže vzťahovať na opis jednotlivých častí grafu funkcie, grafický model riešenia slovnej úlohy a pod. Ako príklad sme vybrali náčrt, ktorý by obsahoval načrtnutý štvorec $ABCD$ so stranou a . Žiak by mal do náčrtu doplniť obdĺžnik $KLMN$ tak, že by jednu stranu štvorca zväčšil o 10 % a susednú stranu štvorca zmenšil o 10 %. Na záver by mal porovnať obsahy oboch načrtnutých útvarov.

Predikčná karta môže poskytnúť základný rámec pri nastolení výskumnej otázky pri bádateľsky orientovanom vyučovaní a pomôcť prebudiť záujem žiakov o bádanie. Učiteľ môže pomocou nej rýchlo získať informácie o intuitívnom náhľade žiakov na riešenie nastolenej výskumnej otázky a o ich úsudkoch po využití experimentovania, modelovania alebo úvah podložených výpočtami. Tabuľka 1 obsahuje námet na predikčnú kartu, ktorú by učiteľ mohol využiť v úvode výučby pravdepodobnosti.

Pri posudzovaní spravodlivosti opísaného losovania sa u žiakov môže prejaviť miskoncepia súvisiaca s nerozlíšením mincí pri analyzovaní všet-

kých výsledkov hodov dvoma mincami. Dôsledkom takéhoto postupu je presvedčenie, že losovanie je spravodlivé pre všetkých troch chlapcov. Po vykonaní väčšieho počtu náhodných pokusov a vyhodnotení výsledkov by žiaci mali dôjsť k zisteniu, že navzájom rôzne strany padajú pri hode dvoma mincami častejšie ako dva znaky aj ako dve čísla.

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:		
Traja chlapci Adam, Boris a Cyril chceli hrať futbal, ale žiadnemu z nich sa nechcelo ísť domov po loptu. Preto sa rozhodli, že budú losovať hodením dvoch mincí. Ak padne na oboch minciach číslo, pôjde po loptu Adam. Ak padne na oboch minciach znak, pôjde po loptu Boris. Ak padne na minciach číslo aj znak, pôjde po loptu Cyril.				
Otázka	Predpoveď		Odpoveď	
Je opísané losovanie spravodlivé pre každého chlapca?	áno	nie	áno	nie

Tabuľka 1 Predikčná karta na motivovanie žiakov k bádaniu vo výučbe pravdepodobnosti

Karta na vyvodenie je zameraná na vyvodenie záverov z údajov, ktoré mohol žiak získať na základe pozorovania, experimentovania alebo modelovania. Žiak by mal vypozerovať určité súvislosti, na základe ktorých by mal zostaviť čiastočné úsudky, ktoré by potom zhrnul do záverov. Uvedená stratégia formatívneho hodnotenia je vhodná na rozvíjanie bádateľských spôsobilostí, ktoré by mal žiak uplatňovať pri bádateľsky orientovanom vyučovaní matematiky. Na ukážku sme vybrali neúplnú tabuľku (pozri tabuľku 2) k riešeniu kombinatorickej úlohy, v ktorej je naznačený systém výpisu možností.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1												
2												
3												
4												
5												
6												

Tabuľka 2 Model vo forme tabuľky k riešeniu kombinatorickej úlohy

Spolu s tabuľkou by mal žiak k dispozícii aj zadanie úlohy: Zo šiestich detí je potrebné vybrať dve, ktoré pôjdu na súťaž. Vie sa, že Alena pôjde len s Jurajom. V tabuľke je naznačený systém výpisu možností a niekoľko možností výberu dvojice detí. Doplňte do zvýraznenej oblasti tabuľky čiarky tak, aby tabuľka obsahovala všetky možnosti pre výber dvojice detí na súťaž. Rozhodnite, ktoré číslo prislúcha v tabuľke Alene a ktoré Jurajovi.

Odpoveďový hárok predstavuje formu krátko priedbežného testu, v ktorom by mohla byť postupne rozvíjaná úloha alebo uvedená skupina súvisiacich úloh. Učiteľ ho môže zadať žiakom v priebehu výučby príslušnej témy, aby zistil informácie o aktuálnych vedomostiach žiakov a prípadne aj identifikoval nedostatky, ktoré si vyžadujú ďalšie učebné činnosti na zlepšenie. Vybraná ukážka je zameraná na aplikáciu lineárnej funkcie: Do zásobníka plynu v aute vojde 62 litrov plynu. Auto spotrebuje priemerne 14 litrov plynu na prejdenú dráhu 100 km.

a) Určte, medzi ktorými veličinami je vzťah priamej úmernosti a vyjadrite ho zápisom obsahujúcim premenné.

b) Zapište predpis funkcie f , ktorá vyjadruje množstvo plynu v zásobníku po prejdení x km.

Pre rýchle a jednoduché vyhodnotenie žiackych riešení v triede môže byť k odpoveďovému hároku pridaná pre učiteľa aj rubrika. Často je postačujúca jednoduchá rubrika vymedzujúca štyri úrovne výkonu žiaka. Pri hodnotení uvedenej úlohy by mohlo hodnotenie postupne gradovať od nevyhovujúceho výkonu, keď žiak nevedel aplikovať ani priamu úmernosť, k ďalším úrovniam výkonu, ak žiak vedel opísať priamu úmernosť medzi veličinami, vedel zapísať aj predpis správne aplikovanej priamej úmernosti až po zostavenie predpisu lineárnej funkcie f .

Súbor otázok začínajúci faktami je vhodný prostriedok na zisťovanie úrovne osvojenia vedomostí a zručností a aj miery porozumenia pojmov a vzťahov. Jeho obsah tvorí gradovaná postupnosť otázok, ktorá začína jednoduchšími otázkami zameranými na zapamätanie informácií a postupne sú otázky stále viac orientované na uplatnenie výpočtových a argumentačných spôsobilostí. Na ilustráciu sme vybrali súbor otázok k lineárnej funkcii.

1. Čo je grafom lineárnej funkcie?
2. Ktorá z funkcií $f: y = 3 + 2x + x^2$, $g: y = 5 - 2x$ je lineárna?

3. Ktorá z hodnôt $f(-1)$ a $g(-1)$ je väčšia?
4. Ako možno zostrojiť graf lineárnej funkcie, ktorá je daná predpisom?
5. Aký je predpis lineárnej funkcie, ak jej smernica je rovná 1 a jej graf prechádza bodom $[0; -2]$?
6. Akú smernicu má lineárna funkcia, ktorej graf prechádza bodmi $[2; 1]$ a $[4; 7]$?
7. Aké znamienko má smernica lineárnej funkcie h , pre ktorú platí

$$h(-1) > h(1)?$$

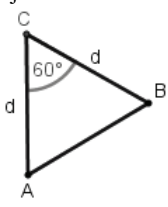
8. Aké argumenty by ste využili pri zdôvodnení svojej odpovede na prvú otázku?

Niektoré z uvedených otázok možno v triede využiť aj na diskusiu o rôznych prístupoch k hľadaniu odpovede. Naše skúsenosti ukazujú, že žiaci v menšej miere využívajú pri riešení úloh charakteristickú vlastnosť lineárnej funkcie a význam jednotlivých koeficientov v predpise lineárnej funkcie a viac sa spoliehajú na výpočty. Možno očakávať, že pri hľadaní odpovede na otázku 6 budú viacerí žiaci hľadať predpis lineárnej funkcie a nebudú analyzovať prírastok lineárnej funkcie v súvislosti s jej smernicou. Učiteľ by mal so žiakmi diskutovať aj o týchto súvislostiach. Pri hľadaní odpovede na poslednú otázku by mali žiaci vychádzať z charakteristickej vlastnosti lineárnej funkcie a zhodnosti trojuholníkov.

Kontrolný zoznam môže nadobúdať rôzne formy v závislosti od účelu jeho využitia. Jedna z jeho foriem môže byť zameraná na rozhodovanie o pravdivosti výrokov. Výroky môžu byť umiestnené do prvého stĺpca tabuľky obsahujúcej tri stĺpce. Druhý a tretí stĺpec tabuľky je určený na rozhodnutie o pravdivostnej hodnote výroku a zdôvodnenie odpovede. Nižšie uvedený kontrolný zoznam v tabuľke 3 obsahuje výroky o podobnosti útvarov.

V jednoduchšej forme môže byť kontrolný zoznam určený aj ako pomôcka k sebahodnoteniu žiakov. V takomto prípade by bol kontrolný zoznam využitý vo forme prehľadu základných vedomostí a zručností v osvojovanej téme. Tabuľka by obsahovala len dva stĺpce. Prvý stĺpec by obsahoval zoznam vedomostí a zručností a v druhom stĺpci by mal žiak zaznamenať, či ovláda príslušné vedomosti a zručnosti. Napríklad v téme výška trojuholníka by mohol kontrolný zoznam obsahovať v prvom stĺpci

vedomosť vysvetliť pojem výška trojuholníka a zručnosti zostrojiť výšku v ostrouhľom, pravouhľom a tupouhľom trojuholníku.

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
V ľavom stĺpci tabuľky sú uvedené výroky o podobnosti geometrických útvarov. O každom výroku rozhodnite, či je pravdivý alebo nepravdivý (nehodiace sa škrtnite). Svoju odpoveď zdôvodnite.		
Výrok	Odpoveď	Zdôvodnenie
Ak sú dva trojuholníky podobné, potom ak je jeden trojuholník tupouhlý, tak aj druhý trojuholník je tupouhlý.	P N	
Každé dva pravouhlé trojuholníky sú podobné.	P N	
Ak v trojuholníku splyývajú stred opísanej a stred vpísanej kružnice, potom je tento trojuholník podobný s trojuholníkom na obrázku.	P N	
 <p>The diagram shows a triangle with vertices labeled A, B, and C. Vertex C is at the top, A is at the bottom left, and B is at the bottom right. The side AC is labeled 'd' and the side BC is also labeled 'd'. An arc at vertex C indicates an angle of 60 degrees.</p>		
Každé dva štvoruholníky, ktoré majú rovnaké pomery všetkých dvojíc zodpovedajúcich si strán, sú podobné.	P N	

Tabuľka 3 Kontrolný zoznam k podobnosti útvarov

Lístok pri odchode predstavuje ďalší spôsob nabádania a vedenia žiakov k sebahodnoteniu. Učiteľ by ho mohol zadať žiakom na konci vyučovacej hodiny, aby žiaci sami zhodnotili svoje nadobudnuté vedomosti a zručnosti. Po analýze odpovedí žiakov by mal učiteľ na nasledujúcej vyučovacej hodine prediskutovať so žiakmi zistené nedostatky a prípadné žiacke otázky. Na ukážku uvádzame v tabuľke 4 lístok pri odchode pre tému siete kocky.

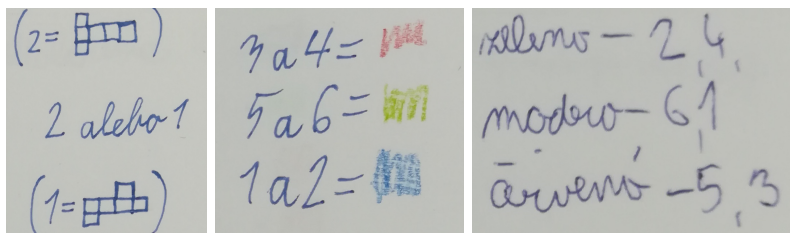
Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
Zameranie odpovedí	Odpovede	
Na sieťach kocky ma najviac zaujalo:		
V čom som sa zlepšil?		
Otázka, ktorú stále mám:		
<p>Do akej miery si viete predstaviť poskladanie kocky z rôznych načrtnutých sietí?</p> <p>1. Viem pri rôznych sieťach kocky. 2. Viem len pri niektorých sieťach kocky. 3. Neviem.</p>		

Tabuľka 4 Lístok pri odchode

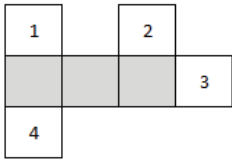
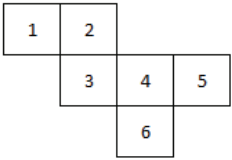
Skúsenosti z využitia formatívneho hodnotenia

Niektoré z uvedených typov prostriedkov na formatívne hodnotenie vyškúšali vybraní dvaja učitelia vo vyučovaní matematiky v 7. ročníku ZŠ. Po krátkom zaškolení dostali učitelia k dispozícii prostriedky na využitie formatívneho hodnotenia pre témy, ktoré mali vyučovať v najbližšom období. Prvý učiteľ zadal v skupine 16 žiakov odpoveďový hárok (pozri tabuľku 5) zameraný na siete kocky.

Prvú úlohu vyriešilo správne deväť žiakov. Väčšina z nich dokázala využiť svoju predstavivosť aj pri riešení druhej úlohy, lebo siedmi z nich vyriešili správne aj druhú úlohu. Na ilustráciu sme uviedli jedno správne riešenie prvej úlohy v ľavej časti obr. 2.



Obr. 2 Ukážky žiackych riešení úloh k sieťam kocky

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
V ľavom stĺpci tabuľky sú uvedené zadania úloh spolu s obrázkami. Svoju odpoveď zapíšte do druhého stĺpca tabuľky.		
Úloha	Odpoveď	
<p>1. Ktorý očíslovaný štvorec je potrebné odobrať, aby sme získali sieť kocky? Nájdite všetky možnosti.</p> 		
<p>2. Predstavuje nižšie uvedený obrázok sieť kocky? Ak áno, rozhodnite, ktoré dvojice štvorcov máme zafarbiť modrou, červenou a zelenou farbou, aby po zložení kocky boli steny oproti sebe zafarbené rovnakou farbou.</p> 		

Tabuľka 5 Odpoveďový hárok k sieťam kocky

Pri riešení prvej úlohy štyria žiaci uviedli len jedno riešenie spočívajúce v odstránení štvorca s číslom 2. Možno predpokladať, že títo žiaci vedia v mysli poskladať niektoré štandardné siete kocky, ale pri niektorých špeciálnych typoch sietí kociek zlyhávajú. Jeden z týchto žiakov vyriešil správne druhú úlohu. Predpokladáme, že pri riešení druhej úlohy dvaja žiaci neporozumeli zadanie úlohy, lebo ofarbili susedné steny kocky. Jedno z týchto riešení uvádzame v prostrednej časti obr. 2. Piatí žiaci správne vyfarbili rovnakou farbou len jednu dvojicu stien kocky, ktoré boli označené číslami 3, 5. Pri farbení zvyšných stien kocky sa pomýlili, lebo si nevedeli predstaviť zloženie siete do kocky. Jedno z týchto riešení je zobrazené v pravej časti obr. 2. Niektorí žiaci neodpovedali na prvú otázku

pri riešení druhej úlohy. Učiteľ by preto mohol zadať žiakom aj úlohu na farbenie stien kocky na obrázku, ktorý by nepredstavoval sieť kocky.

V inej triede v 7. ročníku ZŠ zadala učiteľka žiakom dva kontrolné zoznamy zamerané na rozhodovanie o pravdivosti výrokov a zdôvodnenie odpovedí. Prvý zoznam obsahoval dva výroky o povrchu a objeme kvádra.

1. Kváder s rozmermi $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm má rovnaký povrch ako kváder s rozmermi $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 2$ cm. Platí uvedené tvrdenie?

2. Peter v rozhovore so spolužiakmi tvrdí, že kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými číslami a , b , c a kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými inými číslami d , e , f majú rôzne objemy. Platí Petrove tvrdenie pre každé dva kvádre s uvedenými vlastnosťami?

Prvú úlohu vyriešili správne štrnásť žiaci. Len jeden žiak uviedol nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia. Traja žiaci uviedli zdôvodnenie založené na výpočte povrchu oboch kvádrov. Všetci ostatní žiaci založili zdôvodnenie na úvahe, že druhý kváder má rovnaké rozmery ako prvý kváder, len sú inak označené. Pri riešení druhej úlohy boli už žiaci menej úspešní. Len štyria žiaci uviedli, že Petrove tvrdenie nie je pravdivé. Traja z nich sa pokúsili aj o zdôvodnenie svojej odpovede, ale ich vysvetlenie nemalo racionálny základ. Snažili sa využiť analogický postup ako v prvej úlohe a tvrdili, že kvádre sa líšia len označením hrán. Zvyšní jedenásť žiaci sa domnievali, že Petrove tvrdenie je pravdivé. Na obr. 3 je uvedené nesprávne riešenie vybraného žiaka.

2. Peter v rozhovore so spolužiakmi tvrdí, že kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými číslami a , b , c a kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými inými číslami d , e , f majú rôzne objemy.

Platí Petrove tvrdenie pre každé dva kvádre s uvedenými vlastnosťami?

Platí.

Zdôvodnenie:

Platí, pretože kváder s inými dĺžkami hrán nemôže mať rovnaký objem ako iný kváder s inými dĺžkami.

Obr. 3 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia

Žiakom evidentne chýbala predstava, že aj kvádre s rôznymi rozmermi môžu mať rovnaký objem. Žiaden žiak sa nepokúsil pri zdôvodňovaní ne-

pravdivosti výroku využiť rôzne rozklady prirodzeného čísla. Napríklad kváder s rozmermi 1, 2, 36 má rovnaký objem ako kváder s rozmermi 3, 4, 6. Uvedené postupy by mohol učiteľ využiť pri analýze žiackych riešení v triede a organizovaní diskusie so žiakmi s cieľom napraviť mylnú predstavu žiakov.

Druhý kontrolný zoznam obsahoval tri výroky pojednávajúce o pomeroch. Pri rozhodovaní o ich pravdivostnej hodnote a zdôvodňovaní odpovedí mali žiaci preukázať zručnosti pri práci s pomermi a porozumenie vzťahov pri delení objektov na časti.

1. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 2 : 6, tak dĺžka úsečky CD je trikrát väčšia ako dĺžka úsečky AB . Platí uvedené tvrdenie?

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 1 : 3 a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere 4 : 6, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB . Platí uvedené tvrdenie?

3. Miro si na ovocnom nápoji s objemom 1 liter prečítal, že voda a ovocná šťava sú v pomere 3 : 2 a v ovocnej šťave sú pomarančová šťava a jablková šťava v pomere 1 : 3. Po krátkom zamyslení vyhlásil, že voda a jablková šťava sú v pomere 3 : 3. Je Mirov záver správny?

Prvú úlohu vyriešili správne všetci šestnásť žiaci. Pri zdôvodňovaní žiaci najčastejšie upravili pomer 2 : 6 na 1 : 3 alebo si za dĺžky úsečiek zvolili konkrétne dĺžky 2 a 6. Riešenie druhej a tretej úlohy si vyžadovalo porozumenie rozdielu pri spájaní dvoch pomerov do postupného pomeru a pri rozdelení jednej časti celku na ďalšie časti. Pri riešení druhej úlohy už žiaci neprejavili takú sebaistotu. Pravdivostnú hodnotu výroku v druhej úlohe vyhodnotilo správne 9 žiakov, ale štyria z nich nezdôvodnili svoju odpoveď. Pri zdôvodňovaní žiaci znova najčastejšie využívali konkrétne dĺžky úsečiek. Na ukážku uvádzame na obr. 4 neúplné žiacke zdôvodnenie založené na správnej úvahe.

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 1 : 3 a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere 4 : 6, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB .

Platí uvedené tvrdenie?

Áno

Vysvetlenie:

Lebo ~~lebo~~ je rovnaký pomer 1:3 dvakrát je 2:6, a ~~lebo~~ je 4:6 a pomer EF a CD je 4:6

Obr. 4 Ukážka neúplného žiackeho riešenia pri vytváraní postupného pomeru

Viacerí žiaci neporozumeli spájanie dvoch pomerov do postupného pomeru. Učiteľka ešte v rozhovore s autorom článku spomenula, že niektorí žiaci pri vytváraní postupného pomeru len sčítajú dve čísla v pomeroch (napr. zo súvisiacich pomerov $1 : 2$ a $3 : 4$ vytvoria postupný pomer $1 : 5 : 4$). Tento druh chyby sa v riešeních žiakov nevyskytol. U viacerých žiakov sa však preukázalo neporozumenie postupného pomeru. Na obr. 5 je zobrazené nesprávne riešenie, v ktorom sa žiak bez úpravy jedného z pomerov snažil vytvárať postupný pomer.

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere $1 : 3$ a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere $4 : 6$, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB .

Platí uvedené tvrdenie?

NIE

Vysvetlenie:

AB a $CD : 1:3$

EF a $CD : 4:6$

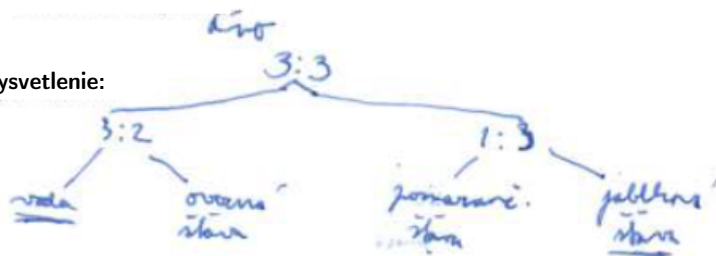
JE STAKRÁT DLHŠIA

Obr. 5 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia úlohy o pomere

3. Miro si na ovocnom nápoji s objemom 1 liter prečítal, že voda a ovocná šťava sú v pomere $3 : 2$ a v ovocnej šťave sú pomarančová šťava a jablková šťava v pomere $1 : 3$. Po krátkom zamyslení vyhlásil, že voda a jablková šťava sú v pomere $3 : 3$.

Je Mirov záver správny?

Vysvetlenie:



Obr. 6 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia úlohy pri porovnávaní častí celku

Správnu odpoveď pri riešení tretej úlohy uviedlo osem žiakov. Zdôvodnenie odpovede žiaci často neuviedli, alebo len zapísali kvantitatívne vzťahy zo zadania úlohy. Pri správnych zdôvodneniach traja žiaci vychádzali z úvahy, že ak z menšej ovocnej časti nápoja zoberieme jednu časť, tak nemôže byť rovnaká ako väčšia časť tvorená vodou. Dvaja žiaci rozde-

lili v obrázku jeden liter ovocného nápoja podľa zadaných pomerov. Žiacke výsledky poukázali na prekvapivé zistenie, že viacerí žiaci si neuvedomili, že ak voda predstavuje väčšiu časť nápoja a menšiu ovocnú časť nápoja rozdelíme na časti, tak žiadna z týchto častí nemôže byť v nápoji zastúpená rovnakým množstvom ako voda. Na ilustráciu uvádzame na obr. 6 jedno z nesprávnych žiackych riešení.

Záver

Opisované prostriedky formatívneho hodnotenia môžu učiteľovi pomôcť identifikovať rôzne nedostatky a zdroje neporozumenia, na ktoré potom môže zareagovať ešte v priebehu výučby. Pri téme Pomery zadala učiteľka v triede aj lístok pri odchode na sebahodnotenie žiakov. Vyskytli sa v ňom aj zaujímavé žiacke otázky. Napríklad jeden žiak uviedol, že nerozumie, prečo sú pomery $2 : 1$ a $1 : 2$ rozdielne. Iný žiak sa opýtal, či môžu byť v pomeroch aj desatinné čísla. V takomto prípade by učiteľ mohol žiakom dať za úlohu vytvoriť postupný pomer, ak $a : b = 5 : 2$ a $b : c = 5 : 1$. Ak by mali premenné a , b , c vyjadrovať napríklad počty mincí s rôznymi hodnotami, tak by pomer $12,5 : 5 : 1$ mohol byť nahradený pomerom $25 : 10 : 2$.

Potvrdilo sa, že mnohí žiaci na základnej škole nevedia presne vyjadrovať svoje matematické nápady, vysvetľovať a zdôvodňovať svoje riešenia. Preto by učitelia mali pri hodnotení žiackych riešení podporovať a usmerňovať žiacku diskusiu. Pre prípad, že by sa v triede nevyskytli niektoré typické žiacke chyby, učiteľ by mohol mať dopredu pripravené riešenia s typickými chybami žiakov. Učiteľ ich môže získať z literatúry alebo zo svojej skúsenosti z predchádzajúcej výučby. Pre rozbor týchto riešení so žiakmi si vie učiteľ dopredu pripraviť vhodnú postupnosť otázok a príklady. Pripravené chybné riešenia môže učiteľ využiť na začiatku hodnotenia žiackych riešení pre vyprovokovanie žiackej diskusie a privedenie žiakov k argumentom na zdôvodnenie nesprávnosti riešenia.

V článku sú stručne vysvetlené základné charakteristiky formatívneho hodnotenia. Aby sme neuvádzali len popis rôznych diagnostických prostriedkov, snažili sme sa uviesť aj niekoľko konkrétnych príkladov pre vybrané témy a načrtnúť niektoré možnosti ich využitia. Ako už bolo uvedené, zámerom formatívneho hodnotenia je identifikovať a analyzovať aspekty a priebeh výučby vzhľadom na vytýčené ciele a formovať následné vyučovanie. Preto by sa učiteľ mal snažiť nielen získavať informácie o učení sa žiakov, ale ich aj vhodne využiť pre elimináciu zistených chýb a nedostatkov a pre diferenciaciu výučby podľa schopností žiakov.

Pod'akovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0265/17 „Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky“.

Literatúra

- [1] *Black, P., Wiliam, D.*: Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, vol. 80 (1998), no. 2, p. 139–148.
- [2] *Duckor, B., Holmberg, C.*: Mastering Formative Assessment Moves, 7 High-Leverage Practices to Advance Student Learning. ASCD, 2017.
- [3] *Frei, N., Fisher, D.*: The Formative Assessment Action Plan. Practical Steps to More Successful Teaching and Learning. ASCD, 2011.
- [4] *Nusche, D., Radinger, T., Santiago, P., Shewbridge, C.*: Synergies for Better Learning, An International Perspective on Evaluation and Assessment. OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education, OECD 2013.
- [5] *Keeley, P.*: Science Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin Press, 2008.
- [6] *Keeley, P., Tobey, Ch. R.*: Mathematics Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin, 2011.
- [7] *Regier, N.*: Book Two: 60 Formative Assessment Strategies. Regier Educational Resources, 2012.
- [8] *Tobey, Ch. R., Arline, C. B.*: Uncovering Student Thinking about Mathematics in the Common Core, 25 Formative Assessment Probes. Corwin, 2014.
- [9] *Wiliam, D.*: Embedded Formative Assessment. Solution Tree Press, 2011.
- [10] The National Council of Teachers of Mathematics: Five “Key Strategies” for Effective Formative Assessment. Association Drive, Reston, 2007. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_04_-_Five_Key%20Strategies.pdf

Zajímavé matematické úlohy

Uverejňujeme ďalšiu časť pravidelnej rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádzame zadanie ďalšej dvojice úloh. Riešenie nových úloh 263 a 264 môžete zaslať najpozdšie do 15. 12. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc alebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, príp. v MS Wordu) na emailovú adresu: mfi@upol.cz.