Závěr

V příspěvku jsme ukázali, jak můžeme využít standardní programové vybavení počítače v podobě programu MS Excel k praktickému seznámení s vlastnostmi rezonančních křivek, které jsou významným portrétem mechanických a elektromagnetických oscilátorů. Určení parametrů elektromagnetického oscilátoru z konkrétní rezonanční křivky na obr. 7a ponecháme na čtenáři (výchozí hodnotou je indukčnost cívky $L = 1{,}1$ H). Pro zájemce o podrobnější seznámení s problematikou nuceného kmitání elektromagnetických oscilátorů v širších souvislostech lze doporučit studijní text FO [4] s množstvím skvělých vyobrazení frekvenčních charakteristik, která vytvořil autor publikace.

Reference

[1] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 3. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2001.

[2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2018.

[3] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2017.

[4] *Šedivý, P.*: Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbrany. Dostupné na: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf

Odvození 1. kosmické rychlosti

JIŘÍ KADAŇKA

Střední škola informatiky, elektrotechniky a řemesel, Rožnov pod Radhoštěm

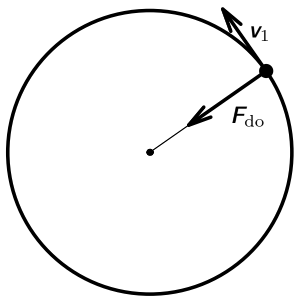
Definice první kosmické rychlosti je jednoznačná a známá. Jedná se o rychlost, kterou má oběžnice Země (nebo jakéhokoli velkého vesmírného tělesa tvaru koule) na kruhové oběžné dráze v zanedbatelné výšce nad jejím povrchem. V učebnicích středoškolské fyziky je pro Zemi nejčastěji uváděna zaokrouhlená hodnota $v_1 = 7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ (viz např. [1]). V následujícím textu je uvedeno 5 různých odvození této rychlosti.

1. Pomocí dostředivé síly

Jde o klasické středoškolské odvození vztahu pro první kosmickou rychlost. Obecně je příčinou rovnoměrného pohybu po kružnici tzv. dostředivá síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{do}}$. Tato síla je v případě oběžnic planety gravitační silou, kterou Země působí na oběžnici při jejím pohybu. Pro velikost gravitační síly platí Newtonův gravitační zákon ve známém tvaru:

$$F = G\,\frac{mM}{R^2},$$

kde m je hmotnost oběžnice, M hmotnost Země, R poloměr Země a G gravitační konstanta.



Protože je tato síla silou dostředivou, lze ji vyjádřit i z obecného vzorce pro velikost dostředivé síly:

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Porovnáním obou vztahů dostáváme pro velikost 1. kosmické rychlosti známý vztah:

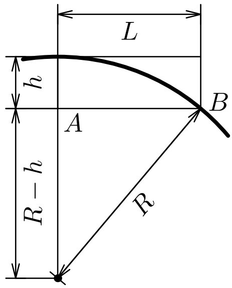
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

2. Pomocí Pythagorovy věty

Let kolem planety si lze v průběhu velmi krátkého časového okamžiku T představit jako zvláštní případ vodorovného vrhu. Země v průběhu letu oběžnice díky své kulatosti jakoby „uhýbá“ pod letící oběžnicí. Svislou složkou vodorovného vrhu je volný pád. Jde o to, aby dráha h volného pádu během doby T přesně odpovídala „uhýbání“ Země, ke kterému dojde na dráze L uražené oběžnicí za tuto dobu T.

Dráha L ve vodorovném směru je vlastně dráha uražená 1. kosmickou rychlostí:

$$L = v_1 T$$



V pravoúhlém trojúhelníku ASB platí Pythagorova věta ve tvaru:

$$L^2 + (R-h)^2 = R^2$$

Po dosazení za h (volný pád) a L dostáváme:

$$(v_1 T)^2 + (R - \frac{1}{2} g T^2)^2 = R^2$$
$$v_1^2 T^2 + R^2 - R g T^2 + \frac{1}{4} g T^4 = R^2$$

V limitním případě $T \to 0$ lze člen se 4. mocninou času T zanedbat a vychází:

$$v_1^2 T^2 - R g T^2 = 0$$
$$T^2 (v_1^2 - R g) = 0$$

Tato rovnost platí v případě, že $v_1 = \sqrt{Rg}$. Po dosazení vztahu

$$g \approx a_g = G \frac{M}{R^2}$$

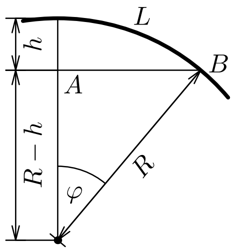
(viz např. [1, s. 134]) a úpravě pak dostáváme pro velikost rychlosti v_1 opět známý vztah:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

3. Pomocí goniometrických funkcí

Tento způsob je variantou předchozího odvození. Po dosazení za h (dráha volného pádu za dobu T) vychází v pravoúhlém trojúhelníku ASB pro kosinus úhlu φ:

$$\cos\varphi = \frac{R-h}{R} = \frac{R-\frac{1}{2}gT^2}{R} = 1-\frac{gT^2}{2R}$$



Pro sinus úhlu φ platí známý vzorec $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$. Dosadíme-li za $\cos\varphi$, dostáváme:

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(1-\frac{gT^2}{2R}\right)^2}$$

Po umocnění závorky a zanedbání členu s T^4 (v limitním případě $T\to 0$) vychází:

$$\sin\varphi = T\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Pro $T\to 0$ platí i $\varphi\to 0$ a dále $\sin\varphi\to\varphi$. Pro délku L oblouku (dráha oběžnice za dobu T) vychází:

$$L = R\varphi = RT\sqrt{\frac{g}{R}} = T\sqrt{Rg}$$

Pro velikost rychlosti pak po dosazení za gravitační zrychlení (viz předchozí odvození) vyjde:

$$v_1 = \frac{L}{T} = \sqrt{Rg} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

4. Pomocí volného pádu do středu Země

Je-li v tělese tvaru koule soustředná kulová dutina, je výsledná gravitační síla kdekoli uvnitř této dutiny nulová. Totéž platí i pro gravitační zrychlení uvnitř této dutiny. Určujeme-li gravitační zrychlení v místě vzdáleném x od středu planety, nemusíme vrstvu nad uvažovaným místem (jakousi „slupku“) uvažovat a gravitační zrychlení pak počítáme jako zrychlení na povrchu koule o poloměru x soustředné se Zemí. Pro hmotnost m takové koule lze odvodit vztah:

$$m = \left(\frac{x}{R}\right)^3 M,$$

kde R je poloměr Země a M její hmotnost.

Pro velikost gravitačního zrychlení g v místě vzdáleném x od středu Země pak po úpravě dostáváme:

$$g = G\frac{m}{x^2} = G\frac{M}{R^3}x$$

Padá-li těleso hypotetickou šachtou proraženou Zemí přes její střed, je zrychlení tohoto pádu rovno právě tomuto gravitačnímu zrychlení. Velikost tohoto zrychlení je přímo-úměrná vzdálenosti x. Zrychlení je současně rovno druhé derivaci vzdálenosti x podle času. Platí tedy:

$$\ddot{x} = -G\frac{M}{R^3}x$$

a po úpravě

$$\ddot{x} + G\frac{M}{R^3}x = 0$$

Jde o diferenciální rovnici harmonického pohybu s úhlovou frekvencí ω. Těleso se tedy při pohybu šachtou pohybuje harmonickým pohybem s amplitudou R a úhlovou frekvencí ω, pro kterou platí:

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$$

Pro maximální velikost v rychlosti harmonického pohybu (v tomto případě jde o rychlost ve středu Země) pak platí:

$$v_1 = \omega R = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

což je opět známý vztah pro první kosmickou rychlost.

5. Pomocí zákona zachování mechanické energie

Toto odvození je variantou předchozího postupu – volného pádu z povrchu Země do hypotetické šachty přes zemský střed. Nulovou hladinu potenciální energie umístíme do středu Země. Těleso na povrchu Země má nulovou kinetickou energii. Potenciální energii na povrchu Země určíme jako mechanickou práci potřebnou k „vynesení“ tělesa ze středu Země na její povrch. Protože se v průběhu tohoto děje mění hodnota gravitačního zrychlení, počítáme potenciální energii integrálem.

Pro diferenciál potenciální energie platí:

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \mathrm{d}W = F_\mathrm{g}\,\mathrm{d}x = mg\,\mathrm{d}x = mG\frac{M}{R^3}x\,\mathrm{d}x$$

Vztah pro gravitační zrychlení $g = G\frac{M}{R^3}x$ ve vzdálenosti x od středu Země byl odvozen výše.

Potenciální energii na zemském povrchu pak určíme pomocí určitého integrálu:

$$E_\mathrm{p} = \int_0^R \mathrm{d}E_\mathrm{p} = \int_0^R mG\frac{M}{R^3}x\,\mathrm{d}x = \frac{GmM}{2R}$$

Kinetická energie tělesa padajícího šachtou je ve středu Země $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Celková energie padajícího tělesa je na povrchu Země určena jen jeho potenciální energií (kinetická je nulová) a celková energie ve středu Země je zase určena jen energií kinetickou – zde je nulová energie potenciální. Ze zákona zachování mechanické energie potom vyplývá:

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2R}$$

Z této rovnosti pak vyjádříme rychlost ve středu Země:

$$v = v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

což je opět vztah pro první kosmickou rychlost.

Poznámka: Všechna odvození platí beze změny pro jakkoliv velké vesmírné těleso, které má kulový tvar.

Reference

[1] *Svoboda, E. a kol.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Prometheus, Praha, 2013.