Příloha časopisu
MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Ročník 29 (2020), číslo 3

Zadání úloh 9. ročníku EGMO

(9. evropské dívčí matematické olympiády)

Language: **Czech**

Day: **2**

Duben 2020

Úloha 4. Permutace celých čísel 1, 2, …, m se nazývá *svěží*, právě když neexistuje žádné přirozené číslo $k < m$ takové, že prvních k členů permutace je 1, 2, …, k v nějakém pořadí. Nechť f_m je počet svěžích permutací celých čísel 1, 2, …, m.

Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí nerovnost $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Například pro $m = 4$ je permutace $(3, 1, 4, 2)$ svěží, zatímco permutace $(2, 3, 1, 4)$ svěží není.

Úloha 5. Uvažujme trojúhelník ABC s $|\sphericalangle BCA| > 90°$. Kružnice Γ opsaná trojúhelníku ABC má poloměr R. Uvnitř úsečky AB leží takový bod P, že $|PB| = |PC|$ a délka úsečky PA je R. Osa úsečky PB protíná Γ v bodech D a E.

Dokažte, že bod P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE.

Úloha 6. Buď $m > 1$ přirozené číslo. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je definována takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ a pro všechna $n \geq 4$ platí

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Určete všechna přirozená čísla m, pro která jsou všechny členy posloupnosti druhými mocninami přirozených čísel.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Aby soutěž byla byla regulérní a příjemná pro všechny soutěžící, nezmiňujte prosím úlohy a nediskutujte o nich na internetu a sociálních sítích do neděle 19. dubna, 00:00 hodin.

Language: **Czech**

Day: **1**

Duben 2020

Úloha 1. Přirozená čísla $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokažte, že aspoň jedno z čísel $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{3030}$ je dělitelné 2^{2020}.

Úloha 2. Najděte všechny posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nezáporných reálných čísel splňující současně následující tři podmínky:

(i) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \le x_1 + 1$;

(iii) existuje taková permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$, že

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutace posloupnosti je posloupnost téže délky se stejnými členy, které však mohou být v libovolném pořadí. Například $(2, 1, 2)$ je permutací $(1, 2, 2)$ a obě jsou permutacemi posloupnosti $(2, 2, 1)$. Speciálně, každá posloupnost je permutací sebe sama.

Úloha 3. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EFA|$ a ve kterém osy vnitřních úhlů u vrcholů A, C a E procházejí týmž bodem.

Dokažte, že také osy vnitřních úhlů u vrcholů B, D a F procházejí společným bodem.

Zde $|\sphericalangle FAB|$ značí velikost úhlu FAB. Podobně jsou značeny velikosti ostatních vnitřních úhlů šestiúhelníka.

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Aby soutěž byla byla regulérní a příjemná pro všechny soutěžící, nezmiňujte prosím úlohy a nediskutujte o nich na internetu a sociálních sítích do neděle 19. dubna, 00:00 hodin.