MATEMATIKA

Nerovnosti pro délky těžnic v trojúhelníku

ŠEFKET ARSLANAGIĆ – DANIELA ZUBOVIĆ

Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s jednou zajímavou nerovností pro délky těžnic v libovolném trojúhelníku a s některými jejími aplikacemi. Budeme zde využívat standardního označení pro použité základní prvky v trojúhelníku ABC, tj. a, b a c značí délky jeho stran po řadě BC, CA a AB, dále t_a, t_b, t_c značí délky jeho těžnic po řadě z vrcholů A, B, C a r, resp. ρ poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané, resp. poloměr kružnice jemu vepsané.

Věta

V libovolném trojúhelníku ABC (při zohlednění výše uvedeného označení) platí nerovnosti

$$t_a \geq \frac{b^2+c^2}{4r}, \qquad t_b \geq \frac{c^2+a^2}{4r}, \qquad t_c \geq \frac{a^2+b^2}{4r}.$$

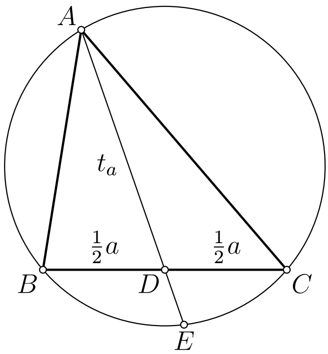
Důkaz provedeme pouze pro první ze tří uvedených nerovností, zbylé dvě pak získáme užitím principu cyklické záměny. Označme D střed strany BC uvažovaného trojúhelníku a E ($E \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou tomuto trojúhelníku, viz obr. 1.

Užitím mocnosti bodu D ke kružnici opsané trojúhelníku ABC máme

$$|AD| \cdot |DE| = |BD| \cdot |CD|,$$

tj.

$$t_a \cdot |DE| = \frac{1}{4}a^2 \qquad \text{a odtud} \qquad |DE| = \frac{a^2}{4t_a}. \tag{1}$$



Obr. 1

S ohledem na (1) dále platí

$$|AE| = |AD| + |DE| = t_a + \frac{a^2}{4t_a} = \frac{4t_a^2 + a^2}{4t_a}. \qquad (2)$$

Využitím známého vztahu $t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ pro vyjádření druhé mocniny délky těžnice t_a pomocí délek stran trojúhelníku ABC obdržíme po dosazení za t_a^2 v čitateli na pravé straně (2) po snadné úpravě

$$|AE| = \frac{b^2 + c^2}{2t_a}.$$

Protože $|AE| \leq 2r$, dostaneme dále

$$\frac{b^2 + c^2}{2t_a} \leq 2r, \qquad \text{a tedy} \qquad t_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4r}.$$

Tím je důkaz první nerovnosti uzavřen.

Rovnost zde nastane, právě když $b = c$, tedy v případě rovnoramenného trojúhelníku se základnou BC, nebo v případě pravoúhlého trojúhelníku s přeponou BC.

Důsledek 1

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2r}, \qquad (3)$$

přičemž rovnost nastane, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Důkaz nerovnosti (3) obdržíme součtem všech tří nerovností z věty 1. Rovnost v ní však nastane, právě když je trojúhelník rovnostranný.

Nyní uvedeme další důsledky dokázaného tvrzení. Využijeme-li k dalšímu odhadu pravé strany (3) známou *Weitzenbökovu nerovnost*, viz např. [2], [3] nebo [4, s. 18], ve tvaru $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}$, kde P je obsah trojúhelníku ABC, resp. silnější, tzv. *Finslerovu–Hadwigerovu nerovnost* ve tvaru $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3} + Q$, kde $Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, viz [3], [4, s. 19] nebo [5, s. 151], dostaneme následující odhady. V obou z nich přitom nastane rovnost, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Důsledek 2

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{2P\sqrt{3}}{r}, \qquad \text{resp.} \qquad t_a + t_b + t_c \geq \frac{4P\sqrt{3} + Q}{2r}.$$

Další důsledky nerovnosti (3) se opírají o identitu

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(s^2 - \rho^2 - 4r\rho), \tag{4}$$

kde $2s = a + b + c$, kterou lze nalézt např. v [3] nebo [5, s. 123]. Platí tak

Důsledek 3

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{s^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r}. \tag{5}$$

Na základě nerovnosti $s^2 \geq \rho(16r - 5\rho)$, viz např. [3, 5.8, s. 50], plyne ze vztahu (5)

$$\begin{aligned} t_a + t_b + t_c \geq \frac{s^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r} &\geq \frac{16r\rho - 5\rho^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r} = \\ &= \frac{12r\rho - 6\rho^2}{r} = 6\rho\left(2 - \frac{\rho}{r}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Užitím Eulerovy nerovnosti $r \geq 2\rho$, viz např. [4, s. 45], dostaneme

$$\frac{\rho}{r} \leq \frac{1}{2},$$

takže pravou stranu (6) lze dále odhadnout

$$6\rho\left(2-\frac{\rho}{r}\right) \geq 6\rho\left(2-\frac{1}{2}\right) = 9\rho.$$

Důsledek 4

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq 9\rho,$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poznámka. Lze dokázat také nerovnost $t_a + t_b + t_c \leq \frac{9}{2}r$, viz např. [5, s. 144].

Poslední důsledek nerovnosti (3), který zde uvedeme, využívá nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem pro délky stran a, b, c uvažovaného trojúhelníku ABC a nerovnost $s^2 \geq 27\rho^2$, viz např [3, 5.11, s. 52].

Důsledek 5

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{18\rho^2}{r},$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Podrobné provedení *důkazu* této nerovnosti přenecháváme laskavému čtenáři.

(Z německého originálu zaslaného redakci časopisu Matematika–fyzika–informatika přeložil a upravil *Jaroslav Švrček*.)

Literatura

[1] *Arslangić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] *Bilčev, S. J.*: Recent Strategies for Creating and Proving of Geometric Inequalities. In: Sborník MAKOS 2008, Olomouc, 2008.

[3] *Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.*: Geometric inequalities. Wolters–Nordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] *Horák, S.*: Nerovnosti v trojúhelníku. Edice „Škola mladých matematiků“, svazek 57, Praha, 1986.

[5] *Švrček, J., Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.