O mincích a invariantech

LUDĚK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky MU, Brno

Dobrá matematická úloha je něco jako dobrá hra. Snad nebudeme daleko od pravdy, když řekneme, že dobrá hra by měla splňovat určité podmínky, které ji činí pro hráče atraktivní. Aniž bychom si dělali nároky na úplnost výčtu takových podmínek, či tvrdili, že každá dobrá hra je musí bezpodmínečně a v plném výčtu naplnit, zmiňme alespoň některé: relativně jednoduchá nebo alespoň snadno srozumitelná pravidla, možnost plánování a tvorby strategií, široká paleta herních variant, přesah do různých oblastí ne nutně pouze matematiky apod. Dostupná populárně-naučná literatura nabízí bezpočet příkladů takových úloh. Dobré příklady lze nalézt rovněž na tématicky zaměřených internetových stránkách.

Záměrem článku je poukázat na jeden takový zajímavý zdroj a uvést příklad úlohy, která má na jedné straně velmi jednoduchou formulaci a snadno srozumitelný způsob hledání řešení, na straně druhé pro některé řešitele možná poněkud překvapivý výsledek a zejména velmi zajímavý matematický kontext.

Již několik let je každé druhé pondělí na webu britského deníku The Guardian uveřejněna úloha související s matematikou či logikou.[1)] Autorem příspěvků je britský novinář a spisovatel *Alex Bellos* (Alex Bellos's Monday puzzle). Jméno autora příspěvků nemusí být čtenářům majícím v oblibě populárně-naučnou literaturu z oblasti matematiky zcela neznámé. V nedávné době vyšly v češtině hned dvě popularizační publikace, ve kterých Alex Bellos prokazuje schopnost poutavě a čtivě popsat problémy aktuální i historické povahy z různých oblastí matematiky.[2)]

Nyní již k naší úloze, která byla na stránkách The Guardian uveřejněna 7. října 2019. Úloha nese v originále název *Getting coins out of the bank*, což můžeme volně přeložit např. jako *Dostaňte mince z banky* [5].[3)]

[1)] https://www.theguardian.com/science/mathematics

[2)] Bellos, A.: Alexova dobrodružství v zemi čísel. Dokořán, Praha, 2015.
Bellos, A.: Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech. Dokořán, Praha, 2016.

[3)] Autorem úlohy je Carlos Sarraute, https://www.researchgate.net/profile/Carlos_Sarraute.

1. Dostaňte mince z banky

Naše úloha začíná jako hra na mřížce, kterou tvoří nekonečný počet sloupců a řádků. V počáteční pozici jsou na mřížce v jejím levém horním rohu umístěny tři mince, které spolu s jedním volným polem tvoří čtvercovou *banku* (obr. 1). Cílem hry je dostat mince ven z banky, přičemž hráč musí postupovat podle následujících pravidel.

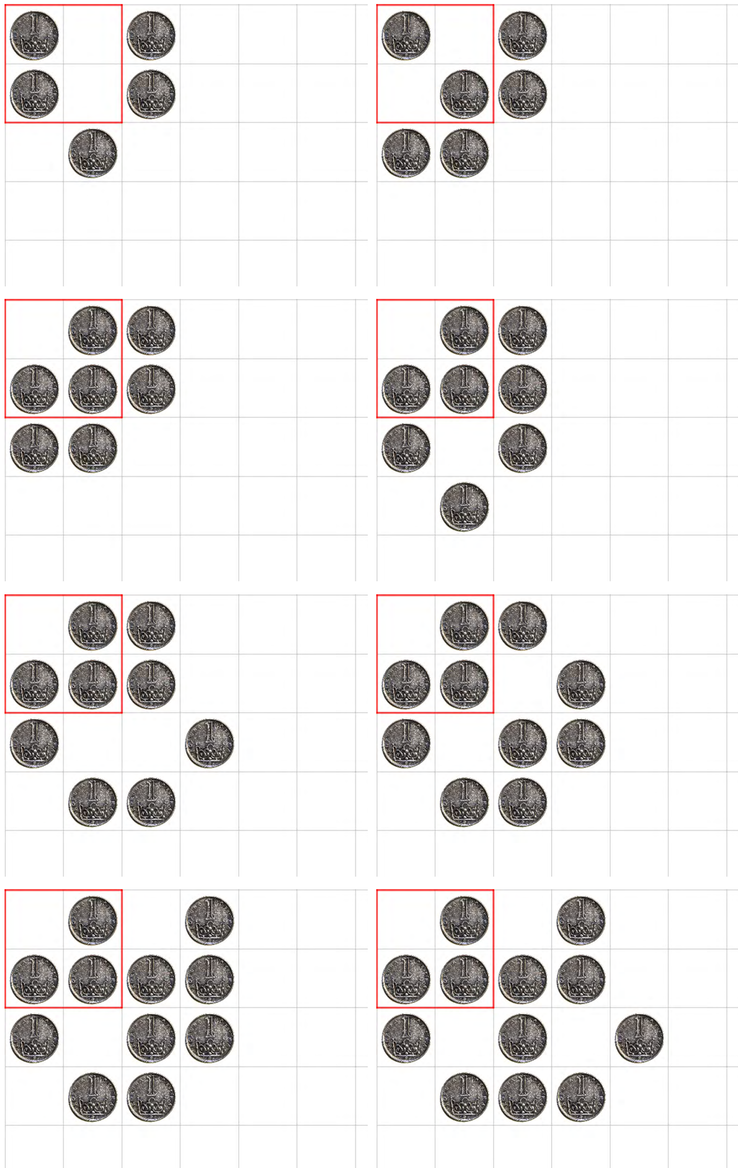
Obr. 1 Umístění mincí v bance na počátku hry

(i) Pokud hráč hodlá odstranit z libovolného pole minci, pak ji musí nahradit dvěma mincemi. Jednu z mincí položí na pole vpravo od odstraněné mince, druhou na pole pod odstraněnou minci (obr. 2).

(ii) Podmínkou pro provedení kroku z bodu (i) je, že obě potřebná pole jsou před odstraněním mince prázdná (obr. 2).

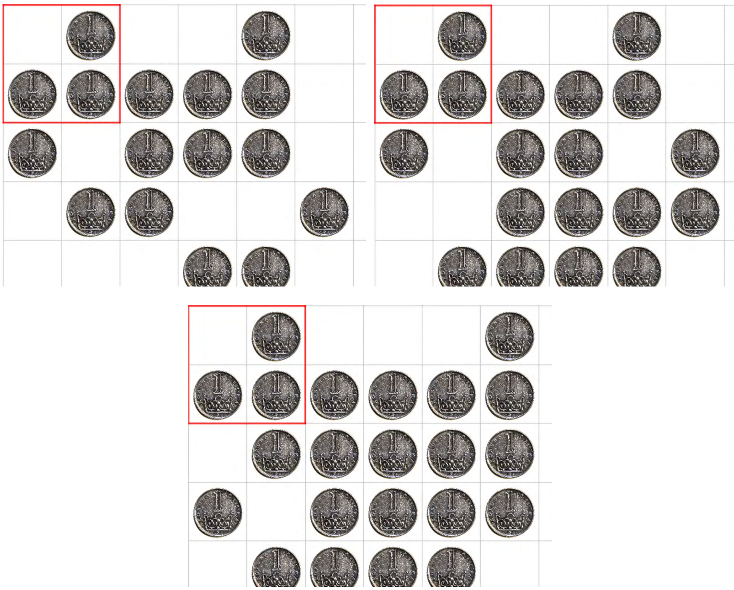
Obr. 2 Pravidla pro posun mincí v mřížce

Připomeňme ještě jednou cíl, kterým je dostat podle výše uvedených pravidel mince z banky. Vezměme tedy několik mincí a hledejme cestu, jak vyvést mince z banky. Pokud navážeme na obr. 2, pak několik dalších kroků může vypadat např. tak, jak je ukázáno na obr. 3.



Obr. 3 Několik možných prvních kroků při posunu mincí v mřížce

Pokud budeme pokračovat a sledovat stav např. po každých třech krocích, pak může rozestavení mincí vypadat jako na obr. 4.[4)] Dále již po několika prvních krocích zjistíme, že mincí v mřížce rychle přibývá (každým krokem o jednu).



Obr. 4 Další posun mincí v mřížce (vždy po třech krocích)

[4)] Velmi jednoduše si lze vyzkoušet různé varianty posouvání minci na adrese https://scratch.mit.edu/projects/334378520.

Jestliže jste pojali podezření, že všechny mince z banky vyvést nelze, pak jste na správné cestě. Jakýkoliv pokus končí situací, kdy mince uvíznou v nějaké poloze, která může odpovídat např. stavu podobnému jako na obr. 4. Zkusme tedy pracovat s hypotézou, že mince podle pravidel, která jsme si stanovili, z banky dostat nelze. Vytvořením hypotézy opouštíme sféru pouhé hry a posouváme se do sféry matematiky, která, jak bude ukázáno dále, nabízí velmi důvtipný způsob důkazu stanovené hypotézy.

2. Důkaz hypotézy

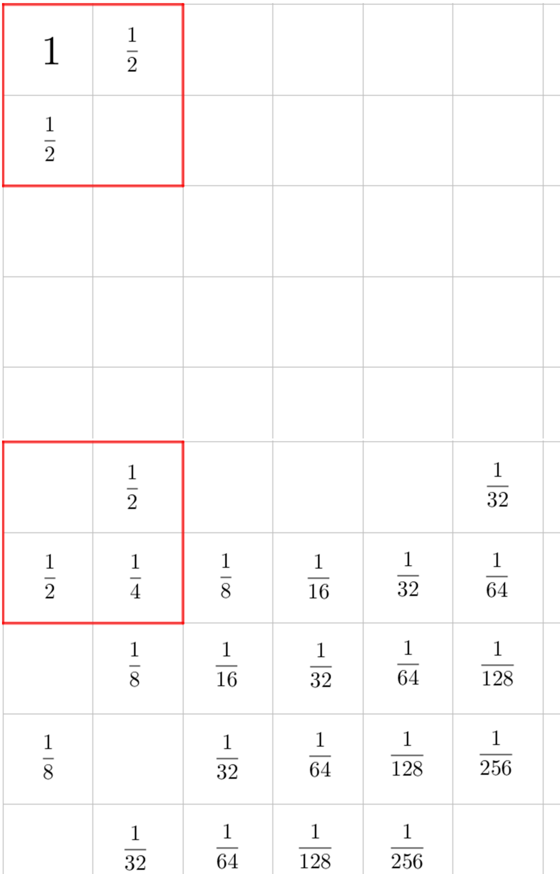
V další části nahradíme v mřížce mince čísly podle schématu, jehož smysl bude záhy zřejmý. Čísla, kterými nahradíme mince, budou představovat *váhu* dané buňky. Do levé horní buňky umístíme číslo (váhu) 1. Buňky bezprostředně vpravo a pod buňkou s váhou 1 budou mít váhu $\frac{1}{2}$. Buňky umístěné ve směru vpravo nebo ve směru dolů od dané buňky budou mít váhu, která bude vždy polovinou *váhy* buňky, které je v mřížce bezprostředně výše nebo více vlevo. Pohledem do mřížky např. okamžitě zjišťujeme, že buňky ležící ve stejné úhlopříčce mají stejnou váhu (obr. 5).

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$

Obr. 5 Váhy jednotlivých buněk v mřížce

Jestliže postupujeme při posouvání mincí podle výše stanovených pravidel, pak sice v každém kroku v mřížce přibývá jedna mince, váha buněk obsazených mincemi se však zachovává. Na počátku je součet vah buněk obsazených mincemi roven 2 (obr. 6 vlevo). V jakémkoliv dalším kroku zůstává váha obsazených buněk zachovaná, např. na obr. 6 vpravo je součet vah buněk roven hodnotě:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 4 \cdot \frac{1}{64} + 3 \cdot \frac{1}{128} + 2 \cdot \frac{1}{256} = \frac{512}{256} = 2$$



Obr. 6 Porovnání vah buněk ve dvou stavech úlohy

Pokud by tedy úloha měla řešení a mince bylo možné z banky vyvést, pak by součet vah buněk ležících mimo banku musel být minimálně roven součtu vah buněk obsazených mincemi na počátku úlohy.

Je zřejmé, že musíme určit součet vah buněk celé nekonečné mřížky. Každý řádek (sloupec) mřížky tvoří nekonečná geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1}{2}$. Pokud sečteme váhy buněk v 1. sloupci (řádku)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

2. sloupci (řádku)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

3. sloupci (řádku)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

atd. sloupci (nebo řádku) mřížky, získáme další nekonečnou geometrickou posloupnost

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots,$$

jejíž součet je roven hodnotě

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4,$$

která představuje váhu všech buněk celé nekonečné mřížky. Nyní je již důkaz téměř hotov. Stačí již pouze uvážit, že rozdíl součtu vah buněk tvořících celou mřížku a buněk tvořících banku je $4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Číslo $\frac{7}{4}$, představující váhu buněk ležících mimo banku, je menší než je součet vah buněk obsazených mincemi na počátku $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2)$. *Mince tedy skutečně nelze podle výše stanovených pravidel z prostoru banky vyvést.*

3. Invarianty

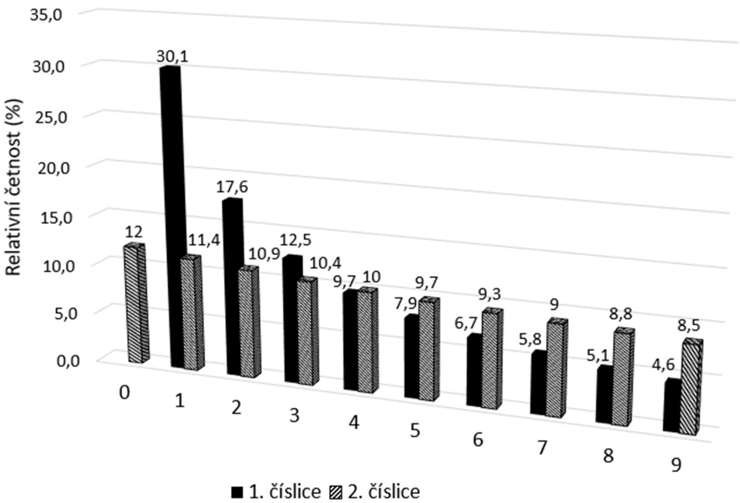
Cílem této části je poukázat na zajímavý matematický kontext metody použité k důkazu v předchozí části, který souvisí s praktickou aplikací pojmu tzv. *invariantu.* Uveďme nejprve definici samotného pojmu invariantu.

Invariantem rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování nějakého postupu nemění [1].

Invarianty lze nalézt v řadě oblastí nejen matematiky, ale také fyziky či chemie. Pro lepší pochopení uveďme několik konkrétních příkladů invariantů [1]:

- Lze snadno ukázat, že přičtením libovolné konstanty ke všem členů aritmetické posloupnosti získáme opět aritmetickou posloupnost, která má stejnou diferenci. Invariantem je zachování aritmetické posloupnosti i diference.
- Plnění nádrže o daném objemu čerpadly o stejném výkonu závisí na počtu čerpadel a čase, po který pracují. Invariantem je celková práce, která odpovídá součinu počtu čerpadel a celkového času.
- Důležité invarinty představují zákony zachování známé z fyziky a chemie.

Zajímavý příklad invariantu lze nalézt v oblasti tzv. Benfordova zákonu. Benfordův zákon vychází z empirických pozorování, ze kterých vyplývá, že v mnoha přirozeně se vyskytujících souborech číselných dat nemají první číslice stejné zastoupení, ale řídí se určitým typem logaritmické distribuce. Malé číslice 1, 2 nebo 3 tak mají větší četnost zastoupení na první číselné pozici než číslice velké (obr. 7). Tato nerovnoměrnost v zastoupení navíc nezávisí na měřítku, které je invariantem, více např. [2].



Obr. 7 Relativní četnost číslic na první, resp. druhé pozici podle Benfordova zákona

Zmíněnou nezávislost na měřítku můžeme demonstrovat na příkladu čísel tvořících Lucasovu posloupnost (L_n).[5)] Rekurentní vzorec této posloupnosti je

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ L_1 = 2,\ L_2 = 1.$$

Lucasovu posloupnost tedy tvoří čísla

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

V tabulce 1 je uvedena relativní četnost prvních číslic v L_n, $8L_n$ a $20L_n$ ve srovnání s četností číslic podle Benfortova zákona. Je zřejmé, že relativní četnosti jsou blízké Benfortovu zákonu a skutečně nezávisí na změně měřítka.[6)]

Číslice	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
B. zákon	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6
L_n	31	17	14	10	8	5	7	4	4
$8L_n$	29	18	13	9	8	7	4	7	5
$20L_n$	28	18	13	10	7	8	6	5	5

Tab. 1 Relativní četnost prvních číslic podle Benfortova zákona a v L_n, $8L_n$ a $20L_n$

Obdobnou nezávislost na měřítku můžeme zaznamenat také v případě tzv. Zipfova zákonu, který popisuje poměrně často se vyskytující vztah mezi pořadím a četností prvků v různých statistických souborech (více např. [3]).

Pro poslední zde zmíněný příklad výskytu invariantů využijeme Rubikovu kostku, která je jedním z nejznámějších hlavolamů světa [4]. Rubikova kostka je mechanický hlavolam tvořený krychlí složenou z dílčích barevných krychliček. Úkolem je otáčením přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá strana celého tělesa byla obarvena jen jednou barvou.[7)]

5) Lucas, F. É. A. (1842–1891) byl francouzský matematik.

6) Potvrzení uvedeného pozorování by bylo možné provést např. χ kvadrát testem dobré shody.

7) Ernő Rubik (nar. 1944) je maďarský vynálezce, sochař a profesor architektury.

Pokud bychom mohli promíchat barvy všech kostiček kostky naprosto bez jakéhokoliv omezení, pak bude celkový počet barevných konfigurací[8)]

$$519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.$$

Toto obrovské číslo ovšem nevyjadřuje počet reálně nastavitelných uspořádání kostky, neboť je možné pootáčet pouze stěnami kostek. Skutečná hodnota možných uspořádání kostiček na Rubikově kostce je tak zlomkem uvedené hodnoty a lze ukázat, že jde přesně o dvanáctinu výše uvedeného počtu konfigurací, tj.

$$43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

Každé otáčení ovlivňuje současně polohu několika kostiček, přičemž některé charakteristiky (invarianty) celé kostky nelze změnit.

(i) *Parita.* Výměna poloh kostiček se děje přesunem sudého počtu dvojic objektů, jedná se tedy o sudou permutaci. Takových permutací je přesně polovina celkového počtu možných permutací (druhou polovinu tvoří liché permutace) a rotacemi lze uskutečnit pouze polovinu možných uspořádání kostky.

(ii) *Parita hran stěn.* Podobně jako v předchozím bodu i zde podmínka půlí celkový počet možných stavů, neboť také v případě posloupností rotací jde o sudou permutaci.

(iii) *Trojčetnost rohů.* Při každé rotaci se otáčí celá stěna kostky. Pokud očíslujeme jednotlivé stěny rohových kostiček čísly 0, 1 a 2, a to vždy po směru hodinových ručiček, pak součet všech těchto čísel modulo 3 se nezmění při libovolné rotaci. Podmínka tedy snižuje počet možných uspořádání na třetinu.

---

8) Uvedenou hodnotu určíme pomocí kombinatorických pravidel. Osm rohů kostky můžeme obsadit 8! způsoby, navíc každá rohová kostička může být pootočena a orientována třemi různými způsoby. Celkem tedy pro rohové kostičky existuje $3^8 \cdot 8!$ možných konfigurací. Analogicky určíme počet možných uspořádání 12 krychliček uprostřed hran, který je roven hodnotě $2^{12} \cdot 12!$, neboť pro každou kostičku existují vždy dva různé způsoby pootočení. Použitím kombinatorického pravidla součinu dále platí, že

$$3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.$$

Pokud shrneme výše uvedené poznámky o invariantech na Rubikově kostce, zjistíme, že skutečný počet možných uspořádání je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, tj. dvanáctkrát menší:

$$\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!}{12} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

V naší úloze byl invariantem součet vah buněk obsazených mincemi. Zachovávající se součet vah buněk na jedné straně a menší než minimální hodnota součtu vah buněk mimo banku na straně druhé jsou praktickou aplikací pojmu invariantu k řešení naší úlohy.

Závěr

Řadu zajímavých úloh využívajících pojmu invariantu lze nalézt v [1]. Zájemci mohou samozřejmě zvažovat další varianty rozložení mincí v bance a možnosti, jak je v konečném počtu kroků podle výše stanovených (popř. upravených) pravidel vyvést z banky.

Literatura

[1] *Horenský, R.*: Využití invariantů a poloinvariantů v úlohách školské matematiky. Dizertační práce, Olomouc, 2012. Dostupné z: `https://theses.cz/id/utu9c5/disertacni_prace.pdf`

[2] *Bellos, A.*: Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech. Dokořán, Praha, 2016.

[3] *Spíchal, L.*: Zipfův zákon a další mocninné zákony. Učitel matematiky, roč. 28 (2020), č. 2, s. 94–109.

[4] *Stewart, I.*: Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta. Dokořán a Argo, Praha, 2019.

[5] `https://www.theguardian.com/science/2019/oct/07/can-you-solve-it-getting-coins-out-of-the-bank`