

Fázový portrét oscilátoru

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V učebnicích fyziky jsou základním prostředkem pro seznámení s periodickými, mechanickými nebo elektromagnetickými ději *časové diagramy* veličin, kterými tyto děje popisujeme. V příspěvku [1] jsme se zabývali dalším pohledem na oscilátory prostřednictvím rezonanční křivky jako jejich souhrnné charakteristiky. V tomto příspěvku nahlédneme na kmitající objekty ve *fázovém prostoru*, což je prostor, v němž je každý stav dynamického systému zobrazen jedinečným bodem. Pozornost věnujeme nejprve oscilátorům s jedním stupněm volnosti, jejichž pohyb je popsán časovou závislostí jedné souřadnice. Pohybový stav objektu určuje jeho poloha a hybnost $p = mv$. Okamžitou hodnotu těchto veličin zobrazíme jako bod ve *fázové rovině*. Protože se budeme zabývat objekty s konstantní hmotností, postačí k vyjádření pohybového stavu jen rychlost v . Bod, který systém ve fázové rovině reprezentuje, se pohybuje po *fázové trajektorii*. Soubor těchto křivek pro různé počáteční podmínky kmitání oscilátoru tvoří grafické zobrazení – *fázový portrét oscilátoru*.

Uvedené pojmy objasníme na příkladech různých typů oscilátorů. Abychom současně s textem příspěvku mohli názorně sledovat fázové portréty vybraných oscilátorů v proměnných podmínkách, je k příspěvku přiložen soubor jednoduchých modelů vytvořených programem MS Excel, který je dostupný [ZDE](#). Modely navazují jednak na modely uvedené v příspěvku [1], jednak na modely na CD, které je součástí posledního vydání učebnice [2].

Pružinový oscilátor

Nejjednodušší příklad představuje kmitání netlumeného, popř. tlumeného pružinového oscilátoru (model OSC), který tvoří pružina s tuhostí k

a těleso o hmotnosti m . Netlumený pružinový oscilátor považujeme za dynamický systém, pro který platí pohybová rovnice¹⁾

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

kde $\omega_0^2 = k/m$. Tato rovnice představuje obecný model harmonicky kmitajícího oscilátoru, jehož kmitání je způsobeno silou, lineárně závislou na výchylce oscilátoru. Pokud tato podmínka není splněna, je pohyb oscilátoru složitější, dynamický systém je *nelineární* a kmitání je *anharmonické*.

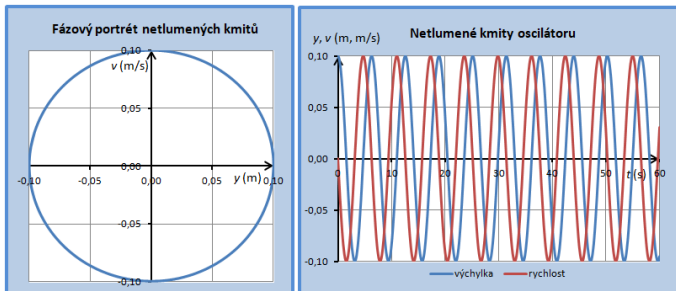
Netlumený pružinový oscilátor je *konzervativní dynamický systém*, jehož celková mechanická energie se nemění, takže jak amplituda výchylky y_m , tak amplituda rychlosti $v_m = \omega_0^2 y_m$ jsou konstantní. Kinematické veličiny netlumeného oscilátoru, jeho okamžitou výchylku a okamžitou rychlost popisují rovnice

$$y = y_m \sin \omega_0 t, \quad v = \omega_0 y_m \cos \omega_0 t.$$

Mocniny těchto rovnic sečteme a po úpravě získáme vztah

$$\left(\frac{y}{y_m}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0 y_m}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy s poloosami $a = y_m$, $b = \omega_0 y_m$. V modelu je zvolena úhlová frekvence $\omega_0 = 1$ rad/s, takže fázový portrét má podobu kružnice o poloměru y_m (obr. 1). Pro srovnání je zobrazen také časový diagram oscilátoru. Okamžitý stav oscilátoru určuje bod, který se při kmitání pohybuje na fázové trajektorii rovnoměrným pohybem.



Obr. 1 Netlumený harmonický oscilátor

¹⁾Pro jednodušší zápis rovnic opustíme středoškolský matematický aparát použitý v příspěvku [1] a použijeme standardní označení pro derivaci veličiny podle času tečkami nad značkou veličiny.

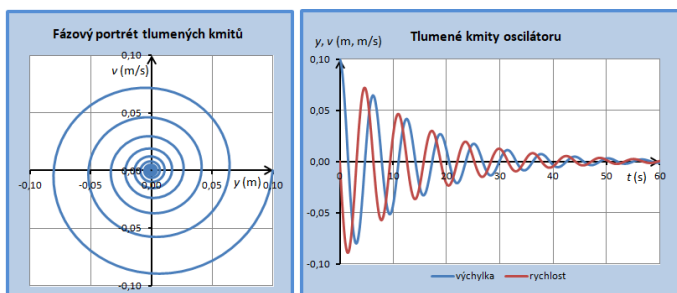
Netlumený oscilátor je ovšem reálně neexistující abstrakce a na každý skutečný oscilátor působí tlumící síla, která způsobuje ztrátu mechanické energie (*dissipace energie*). Tlumený pohyb oscilátoru charakterizuje součinitel tlumení δ a tlumené kmitání popisují rovnice

$$y = y_m e^{-\delta t} \sin \omega t, \quad v = \omega y_m e^{-\delta t} \cos \omega t,$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

V tomto případě určuje tvar fázové trajektorie rovnice logaritmické spirály (obr. 2):

$$\left(\frac{y}{y_m}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega y_m}\right)^2 = e^{-2\delta t}.$$



Obr. 2 Tlumený oscilátor

Oscilátor postupně směřuje do rovnovážného stavu, kterému odpovídá koncový bod spirály. Systém je v ustáleném stavu a jeho obrazem je na fázovém portrétu bod. Tlumený oscilátor je *dissipativní systém*, který je k ustálenému stavu jakoby přitahován (anglicky *attracted*). Podle toho je cíl, k němuž systém při pohybu směřuje, označován jako *atraktor* systému.

V příspěvku [1] jsme definovali činitel jakosti oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta T}.$$

Na obr. 2 vidíme, že fázová trajektorie po každé periodě T protne osu výchylek v bodě, který odpovídá okamžité hodnotě velikosti amplitudy výchylky. Tlumené kmitání pružinového oscilátoru tedy představuje periodický, nikoliv však harmonický pohyb.

Jestliže v počátečním okamžiku má oscilátor amplitudu y_m , pak o periodu později fázová trajektorie protne osu výchylek v bodě

$$y_1 = y_m e^{-\delta T}.$$

Nyní ukážeme, jak lze činitele jakosti oscilátoru určit přímo z fázového portréту. Určíme rozdíl obou výchylek

$$y_m - y_1 = y_m (1 - e^{-\delta T}) = y_m \left(1 - e^{-\frac{\pi}{Q}}\right)$$

Při větších hodnotách činitele jakosti, s nimiž se v praxi nejčastěji setkáváme, můžeme vztah zjednodušit

$$e^{-\frac{\pi}{Q}} \approx 1 - \frac{\pi}{Q}$$

a pro výpočet činitele jakosti získáme vztah

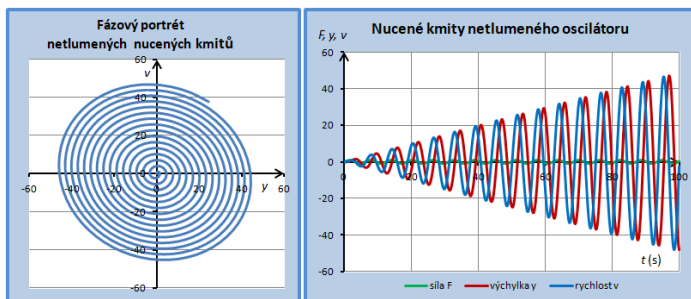
$$Q = \frac{\pi}{1 - \frac{y_1}{y_m}}.$$

To umožňuje určit činitele jakosti na základě poměru velikostí amplitud, aniž bychom znali jejich absolutní hodnoty.

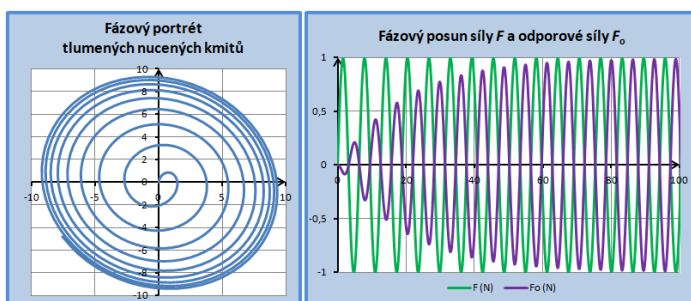
V případě nucených kmitů působí na oscilátor vnější síla, která nahrazuje ztráty oscilátoru vznikající tlumením pohybu. Obecně platí, že při vzniku nucených kmitů dochází k superpozici vlastního tlumeného kmitání a kmitání vynuceného vnější harmonickou silou, která může mít odlišnou frekvenci, než je vlastní frekvence oscilátoru. Podrobněji je to demonstrováno modelem M4.1 na CD k učebnici [2]. V tomto příspěvku se budeme zabývat nucenými kmity při rezonanci oscilátoru, kdy je frekvence síly vynucující kmitání shodná s vlastní frekvencí oscilátoru (model NUC).

V ideálním případě netlumeného oscilátoru amplituda kmitů rovnoměrně a bez omezení roste. To je dobře vidět na obr. 3, kde je jednak fázový portrét odpovídající tomuto případu, jednak časový diagram. Na něm si povšimneme, že vnější síla i rychlost mají stejnou fázi. To znamená, že příkon energie do oscilátoru $P = Fv$ je stále kladný, celková energie oscilátoru se zvětšuje a amplituda stále roste. Fázový portrét má tvar rozvíjející se spirály, která se nepřetržitě vzdaluje od počátečního stavu oscilátoru, aniž by byl dosažen ustálený stav.

V případě reálného tlumeného oscilátoru však s rostoucí rychlostí narůstá také odporová síla, která má v každém okamžiku opačnou fázi než vnější síla. Amplituda kmitů sice roste, ale přírůstek energie a tedy i amplitudy se exponenciálně zmenšuje, až při dosažení shody amplitud vnější síly a odporové síly se celý proces růstu amplitudy kmitů zastaví a nastane ustálený stav, kterému odpovídá stabilní koncový tvar fázového portrétu (obr. 4).



Obr. 3 Nucené kmitý netlumeného oscilátoru



Obr. 4 Nucené kmitý tlumeného oscilátoru

Kyvadlo s velkou počáteční výchylkou – rotátor

V učebnicích fyziky kyvadlo zpravidla představuje jednoduchý model harmonického oscilátoru, přičemž je uvedena podmínka pro vznik harmonických kmitů tím, že počáteční úhlová výchylka φ_0 kyvadla musí být malá. Většinou bývá uváděna podmínka $\varphi_0 \leq 5^\circ$. Pak můžeme kmitání kyvadla délky l považovat za harmonické s vlastní úhlovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ a tato frekvence nezávisí na velikosti počáteční výchylky. Perioda kmitání se sice poněkud liší od hodnoty teoretické, ale odchylka je přibližně 0,05 %. Stačí však zvětšit počáteční výchylku na 10° a odchylka vzroste na 0,2 %. Periodu kmitání kyvadla pak neurčuje jen jeho délka, ale i velikost počáteční výchylky.

Kmitání kyvadla bez tlumení je popsáno rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Použitím prvních dvou členů Taylorova rozvoje²⁾ funkce sinus získáme rovnici

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0,$$

a po úpravě

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3. \quad (2)$$

Výraz na pravé straně rovnice můžeme považovat za opravný člen. Pokud bude jeho hodnota zanedbatelná, bude se měnit okamžitá výchylka kyvadla podle rovnice

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

V případě větších výchylek vztah pro okamžitou výchylku doplníme opravným členem $\varphi_1(t)$ a zapíšeme rovnici pro okamžitou výchylku ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1(t).$$

Dosazením do rovnice (2) dostaneme

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{\omega_0^2}{6} (\varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1)^3.$$

Předpokládejme, že výchylka φ_1 je ještě poměrně malá, takže při výpočtu třetí mocniny výrazu v závorce budeme považovat všechny členy rovnice obsahující φ_1 za zanedbatelné a po úpravě dostaneme

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 \approx \frac{\omega_0^2}{6} \varphi_0^3 \sin^3 \omega_0 t = \frac{\omega_0^2}{6} \varphi_0^3 \frac{1}{4} (3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t).$$

Z výsledku je patrné, že při větších počátečních výchylkách kyvadla je výsledné kmitání superpozicí kmitání s vlastní frekvencí a kmitání s násobky vlastní frekvence. Kmitání kyvadla při větších výchylkách popisuje rovnice

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t + \varepsilon \varphi_0 \sin 3\omega t.$$

kde ε je bezrozměrová konstanta, která pro $\varphi_0 \ll 1$ má hodnotu $\varepsilon \ll 1$ (podrobněji viz např. [3]).

Tento poznatek můžeme zobecnit tak, že každý periodický děj, jehož pohybová rovnice obsahuje vyšší mocniny výchylky, popř. jiné veličiny tohoto děje, je anharmonický a Fourierovou analýzou ho můžeme rozložit na

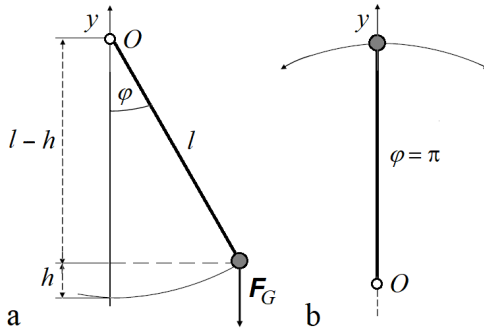
²⁾ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

harmonické složky. Existence harmonických složek je nejvýznamnějším poznatkem o kmitání *nelineárních dynamických systémů*. V podstatě to platí i pro pružinový oscilátor, pokud by vlastnosti pružiny přesně neodpovídaly Hookeovu zákonu. Pružinový oscilátor tak představuje jen teoretický model harmonicky kmitajícího dynamického systému.

Kmitání kyvadla při velké výchylce ilustruje model KYV, který navazuje na obdobný model na CD k učebnici [2]. Vychází z rovnice kyvadla (1) a řeší ji numericky Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{g}{l} \sin \varphi \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i + \omega_i \cdot dt \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \varepsilon_i \cdot dt \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

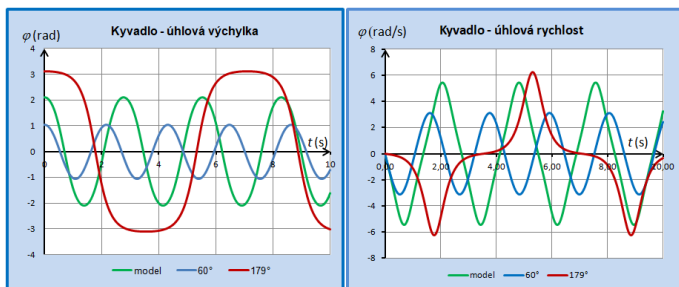
Model řeší pohyb kyvadla, jehož počáteční výchylka $\varphi_0 \rightarrow 180^\circ$. Takový pohyb ovšem nemůže konat klasické kyvadlo s tělesem zavěšeným na vlákne. Nahradíme ho tzv. *rotátorem*, který je tvořen kuličkou o hmotnosti m , upevněnou na konci lehké tyčky o délce l , jejíž hmotnost nebudeme uvažovat. Druhým koncem tyčky prochází osa O , kolem které se může rotátor otáčet (obr. 5a). Okamžitou výchylku rotátoru vyjádříme úhlem φ , který tyčka svírá s osou y . Druhou veličinou charakterizující pohyb rotátoru bude jeho okamžitá úhlová rychlost $\dot{\varphi}$.



Obr. 5 Rotátor

Modelem KYV jsou zobrazeny současně tři rotátory, přičemž u prvního z nich můžeme posuvníkem měnit počáteční výchylku v intervalu

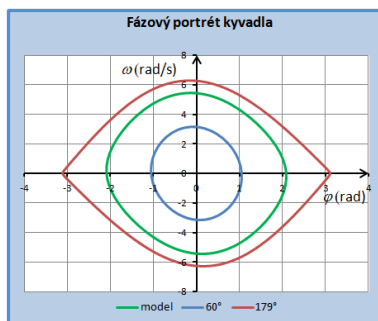
($10^\circ < \varphi_0 < 120^\circ$). Pro každé nastavení počáteční výchylky je vypočítána také odchylka periody od teoretické hodnoty $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Další dva rotátory mají pevně nastavené počáteční výchylky 60° a 179° . Časové diagramy kmitání rotátorů jsou na obr. 6 (rotátor s měnitelnou počáteční výchylkou je nastaven na úhel 120°).



Obr. 6 Časové diagramy výchylky a rychlosti rotátoru

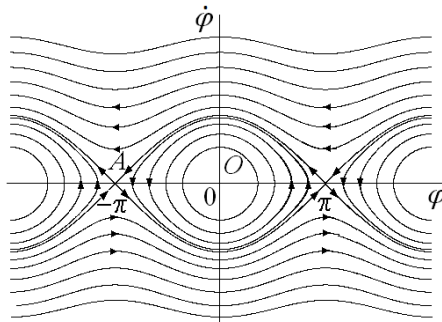
Z grafů je patrné, že s rostoucí počáteční výchylkou se časové diagramy stále více odlišují od harmonického kmitání popsaného rovnicí (1). Mění se jednak tvar křivky časového diagramu, jednak perioda kmitů. Dobře je patrný podíl harmonických složek na časovém diagramu kmitů pro počáteční výchylku 120° , který má výrazný charakter kmitů s trojúhelníkovým průběhem.

Fázové portréty pohybových stavů rotátorů získané modelem KYV jsou na obr. 7. Vidíme, že při maximální amplitudě počáteční výchylky se fázová trajektorie v podobě elipsy, popř. kružnice mění v oblouk, jehož počátečním bodům odpovídá maximální výchylka a nulová úhlová rychlost.



Obr. 7 Fázové trajektorie rotátoru pro 60° , 120° a 179°

Model neřeší případ počáteční výchylky $\varphi_0 = 180^\circ = \pi$. V tomto případě je rotátor ve svislé, nestabilní poloze (obr. 5b), takže není zřejmé, kterým směrem bude jeho pohyb pokračovat. Na rotátor může působit také vnější síla, jejímž působením rotátor přejde nestabilní rovnovážnou polohu (bod nestability) a podle okolností může pokračovat v pohybu oběma možnými směry. Dostatečně velký počáteční impuls může vyvolat otáčení stále jedním směrem. Změnu směru pohybu by pak mohlo způsobit tlumení systému. Oscilátor by nedosáhl k nejvyššímu bodu trajektorie a začal by se pohybovat opačným směrem. Kdyby však na rotátor působila periodická vnější síla, závisel by směr otáčení na vzájemném vztahu periody vlastního kmitání a periody vnější síly.



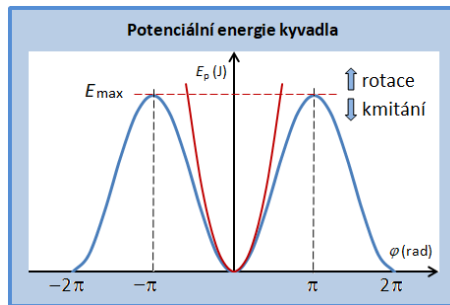
Obr. 8 Fázové portréty rotátoru

Fázovým portrétem rotátoru při různých počátečních výchylkách je soustava fázových trajektorií na obr. 8. Křivky procházející bodem A odpovídají situaci, kdy se systém nachází v nestabilním stavu (rotátor je v labilní poloze a má nulovou rychlost). O dalším pohybu pak rozhodují i nepatrné fluktuace silového působení na rotátor. Rozvětvení fázových trajektorií v bodě A dokládá dvě možnosti dalšího pohybu – otáčení ve stejném nebo v opačném směru. Křivky blíže k počátku souřadnicové soustavy (bod O) reprezentují stacionární stav oscilátoru. Vnější zvlněné křivky charakterizují otáčení rotátoru větší rychlostí, než je rychlost potřebná k dosažení nestabilního stavu. Rotátor má dostatek energie, aby se z maximální polohy nevracel zpět, ale konal plynulý otáčivý pohyb. Fázová trajektorie procházející bodem A a dalšími souměrně umístěnými body na ose výchylek se nazývá *separatrix* a odděluje dvě oblasti stavů dynamického systému: oblast uzavřených fázových trajektorií (kmitání) a oblast otevřených fázových trajektorií plynulého rotačního pohybu.

Ukážeme, že rovnice fázových trajektorií vyplývají přímo ze zákona zachování energie a fázový portrét konzervativního systému můžeme vytvořit bez řešení diferenciální rovnice popisující pohyb systému. Jestliže kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel φ , zvedne se v tíhovém poli těleso kyvadla do výšky h (viz obr. 5) a pro potenciální energii platí

$$E_p(\varphi) = mgh = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Graf na obr. 10 vyjadřuje tato závislost pro celý rozsah výchylek od minima při úhlové výchylce $\varphi = 0$, až pro maximální hodnotu při $\varphi = \pm\pi$: $E_p = 2mgl$. Průběh „potenciálové jámy“ se liší od grafu potenciální energie harmonicky kmitajícího oscilátoru (červený graf na obr. 9), jehož perioda na amplitudě výchylky nezávisí. V blízkosti minima obě křivky splývají, což znamená shodu periody kmitání lineárního a nelineárního oscilátoru.



Obr. 9 Potenciální energie kyvadla

U konzervativního systému neuvažujeme odpor prostředí a jeho celková energie E je dána součtem potenciální energie E_p a kinetické energie E_k ($E_k = 1/2J\dot{\varphi}^2$), který je konstantní³⁾

$$\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = E = \text{konst.} \quad (3)$$

(J je moment setrvačnosti rotátoru: $J = ml^2$). Pro kyvadlo platí $mgl/J = g/l = \omega_0^2$ a v rovnici (3) nahradíme $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Po úpravě dosta-

³⁾V mechanice se pro úhlovou rychlost rotačního pohybu obvykle používá značka ω . Zde je dána přednost označení $\dot{\varphi}$, vyjadřujícímu derivaci $d\varphi/dt$. Označení ω je v textu použito pro úhlovou frekvenci, což je skalární veličina charakterizující periodický děj a je definována vztahem k periodě T , popř. frekvenci f .

neme pro fázovou trajektorii rovnici elipsy

$$\varphi^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} = \frac{2E}{mgl}.$$

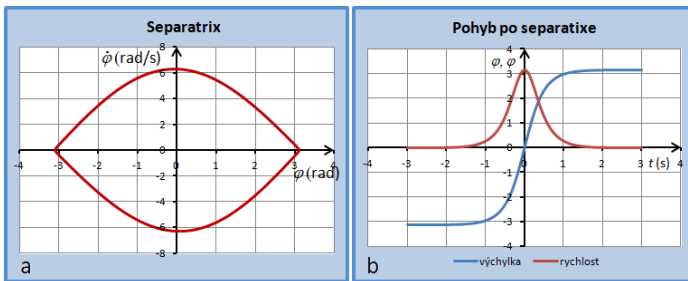
Kyvadlo (rotátor) může maximálně vystoupit do výšky $h = 2l$ a získá potenciální energii $E_{p\max} = mgh = 2mgl$. V případě, že je v počátečním okamžiku rychlost rotátoru nulová, představuje tato energie také celkovou energii E . Pokud je $E < 2mgl$, rotátor kmitá anharmonicky mezi hodnotami φ_m a $-\varphi_m$. Jestliže $E \gg 2mgl$, koná rotátor otáčivý pohyb s úhlovou rychlostí, jejíž maximální hodnota $\dot{\varphi}_{\max} \approx \sqrt{2E/ml^2}$. Při malé výchylce ($E \ll 2mgl$) je kmitání harmonické s úhlovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Zvláštní pozornost věnujeme situaci, kdy je kyvadlo (rotátor) v nestabilním vrcholu trajektorie ($\varphi = \pm\pi$). Pro limitní fázovou trajektorii (separatrix) najdeme z rovnice (3) vztah

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl,$$

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \approx \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

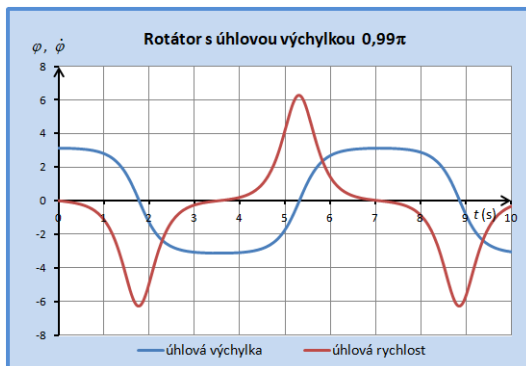
Její grafické zobrazení (obr. 10a) se shoduje s výsledkem získaným řešením rovnice kyvadla numerickou metodou (obr. 7). Časová závislost úhlové výchylky a rychlosti při pohybu po separatrixe je na obr. 10b.



Obr. 10 Separatrix

Čím větší je energie oscilátoru, tím více se kmitání odlišuje od harmonického pohybu a fázová trajektorie se liší od elipsy. V blízkosti hodnoty $E_{p\max}$ se fázová trajektorie protahuje vodorovným směrem (sklon potenciální jámy není tak strmý jako u parabolického tvaru křivky pro harmonický

oscilátor). Při velké amplitudě rotátor v tomto stavu setrvává déle (ploché maximum výchylky) a rychlost má ostré maximum v nejnižším bodě trajektorie. Časový průběh rychlosti má charakter impulsu, kterým rotátor získá potřebnou energii k výstupu do maximální polohy (obr. 11).



Obr. 11 Časový diagram kmitání rotátoru s počáteční úhlovou výchylkou $0,99\pi$

Pro pohyb kyvadla s extrémní výchylkou je charakteristické výrazné prodloužení periody T pohybu. Pro výpočet periody můžeme použít vztah (4) odvozený v [4]. Pro amplitudu výchylky $\varphi_m = 0,99\pi = 178,2^\circ$ dostaneme

$$T \approx \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m} \doteq 7,075 \text{ s.} \quad (4)$$

V modelu KYV je pohyb kyvadla řešen jednoduchou, ale méně přesnou Eulerovou metodou a tímto postupem najdeme, že kyvadlo délky 1 m ($T_0 = 2,006 \text{ s}$) kmitá při výchylce $0,99\pi$ s periodou $T 7,08 \text{ s}$ ($T \approx 3,5T_0$), což je v dobré shodě s teorií. To je dobře patrné i z časového diagramu na obr 11. Při zvětšení počáteční výchylky o 1° na $179,2^\circ = 0,9956\pi$ vzroste perioda o více než sekundu na $8,12 \text{ s}$ a $T \approx 4,0T_0$ (podrobněji viz [4]).

* * *

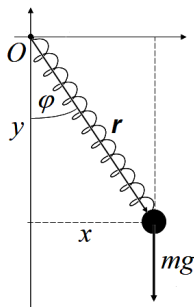
Můžeme shrnout: Kmitání nelineárního dynamického systému není charakterizováno jedinou frekvencí. Jde o periodický pohyb, který je superpozicí harmonických kmitání s různou frekvencí. Periodu kmitání však lze určit na základě numerického řešení odpovídající pohybové rovnice. Těmito poznatky o oscilátorech se zabývá teorie dynamických systémů a můžeme je na základě získaných fázových portrétů zobecnit. Fázové portréty oscilátorů na obr. 1 až 3 odpovídají třem možným stavům systému.

Na obr. 1 je fázový portrét stabilního stavu, kterému na obr. 8 odpovídá bod O (*stabilní střed*), obr. 2 představuje tzv. *stabilní ohnisko* (rovnovážný stav, ke kterému směřuje disipativní systém) a na obr. 3 je *nestabilní ohnisko* (systém směřuje mimo rovnovážný stav). Okolí bodu A na obr. 8 se označuje jako *nestabilní sedlo*, kdy nelze jednoznačně rozhodnout o dalším pohybu systému, který mohou ovlivnit i nepatrné fluktuace působících sil nebo parametrů systému.

Fluktuace v dynamických systémech mohou mít náhodný, stochastický ráz, avšak děj, který způsobí, označujeme jako *deterministický děj*: pohyb dynamického systému se řídí příslušnou fyzikální zákonitostí. Tím se deterministický děj liší od děje se stochastickým průběhem, kdy jeho zákonitosti není možné vyjádřit soustavou pohybových rovnic a chování systému můžeme popsat jen na základě jeho empirického studia. Fázové portréty deterministických dějů tvoří atraktory, jejichž průběh lze přesně popsat.

Pružinové kyvadlo

Netlumený rotátor byl interpretován jako konzervativní systém a popis jeho pohybových stavů byl jednoduchý – deterministický. Existují však oscilátory, které jsou při pohybu nestabilní, a malý vnější impuls může být příčinou jejich chaotického pohybu. Jako příklad uvedeme *pružinové kyvadlo* (obr. 12). Při experimentování se svisle zavěšeným pružinovým oscilátorem předpokládáme, že bude kmitat podél svislé přímky. Často se však stává, že při nepatrné počáteční odchylce od svislého směru začne oscilátor kmitat s měnící se amplitudou také ve vodorovném směru jako kyvadlo.



Obr. 12 Pružinové kyvadlo

I když se nám pružinové kyvadlo jeví jako jednoduchý dynamický systém, analýza jeho pohybu není triviální a teoretičtí fyzikové se jím zabývali již

od 30. let minulého století. Novým impulsem zájmu o tento oscilátor se stala možnost řešit jeho pohybové rovnice numerickými metodami pomocí počítače. Proto najdeme na webu řadu aktuálních publikací, které se touto problematikou zabývají (z českých zdrojů např. [5] a [6]).⁴⁾ Pohyb pružinového kyvadla v rovině vztážné soustavy Oxy budeme zkoumat zjednodušeným modelem PRU. Ten řeší pohybové rovnice obou modů kmitání: příčného – kyvy a podélného – kmity (viz také [7, modely 2.3, s. 36 a 10.2.3, s. 147]).

Na kyvadlo působí tíhová síla F_G a síla pružnosti F_P a pohybovou rovnici kyvadla napíšeme ve tvaru

$$ma = F_G + F_P = -mg - k(r - l)r^0,$$

kde k je tuhost pružiny a l je délka pružiny v nezatíženém stavu. Svisle zavěšené pružinové kyvadlo v klidu se působením tíhové síly prodlouží na délku r a platí $mg = k(r - l)$. V obecné poloze určuje směr síly pružnosti jednotkový vektor $r^0 = r/r$, kde r je polohový vektor určující polohu tělesa vzhledem ke vztážnému bodu O . Budeme uvažovat pohyb kyvadla v rovině xy , takže souřadnice polohy tělesa $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Východiskem dynamického modelu jsou složky působících sil:

$$ma_x = -k(r - l)\frac{x}{r}, \quad ma_y = -mg - k(r - l)\frac{y}{r}.$$

Program modelu PRU tvoří posloupnost výpočtů (dt je časový krok):

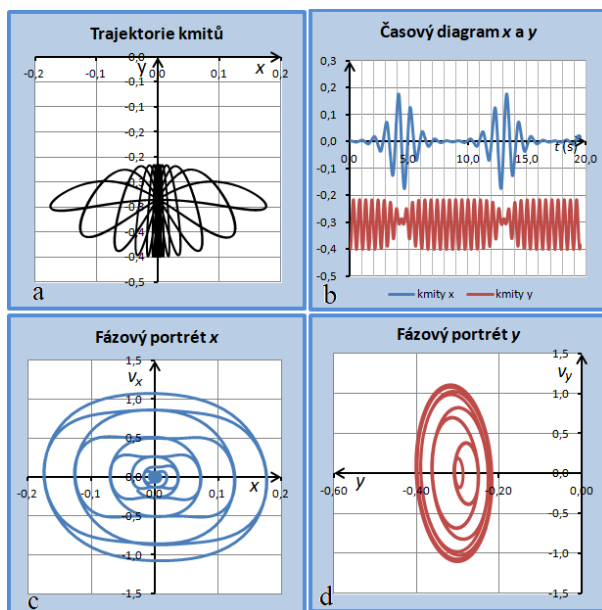
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $a_x = -\left(\frac{k}{m}\right)(r - l)\frac{x}{r}$ $a_y = -g - \left(\frac{k}{m}\right)(r - l)\frac{y}{r}$ $v_{xi+1} = v_{xi} + a_x \cdot dt$ $v_{yi+1} = v_{yi} + a_y \cdot dt$ $x_{i+1} = x_i + v_{xi+1} \cdot dt$ $y_{i+1} = y_i + v_{yi+1} \cdot dt$ $t_{i+1} = t_i + dt$

⁴⁾ V českých publikacích je častější termín *pružné kyvadlo*, což je ekvivalent anglického termínu *elastic pendulum*. Vzhledem k termínu *pružinový oscilátor* v učebnici [2], je dána přednost termínu *pružinové kyvadlo*.

Ponecháme na čtenáři, aby si vlastnosti pružinového kyvadla s různými parametry a počátečními podmínkami ověřil na modelu PRU. Podrobněji si všimneme jen zvláštního případu, kdy dochází k rezonanci obou módů kmitání. V tomto případě můžeme nahlížet na pružinové kyvadlo jako na soustavu dvou spřažených oscilátorů, kdy se energie podélného kmitavého pohybu kyvadla ve směru osy y přenáší na jeho příčné kyvy ve směru osy x a naopak. To se projevuje periodickými změnami amplitud pohybu v navzájem kolmých směrech (příčné kmitání označíme jako *kyvy*, podélné kmitání jako *kmity*). Zaměříme se na případ, kdy platí

$$\frac{mg}{kl} = \frac{\omega_{kyvy}^2}{\omega_{kmity}^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{T_{kyvy}}{T_{kmity}} = 2.$$

Rezonanci nastavíme na základě poznatků o kmitání vázaných oscilátorů (v programu PRU jsou hodnoty period obou módů kmitání spočteny). Při rezonanci přejde veškerá energie z oscilátoru na rezonátor, amplituda oscilátoru je minimální (při přesném nastavení nulová) a amplituda kmitů rezonátoru je maximální (viz obr. 13b).

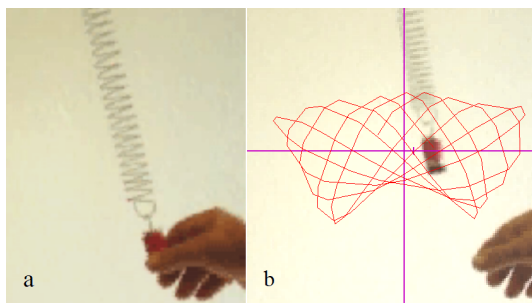


Obr. 13 Kmitání pružinového kyvadla

V našem případě tento stav nastal při nastavení parametrů: $m = 0,16$ kg, $k = 26,1$ N/m, $l = 0,24$ m a počáteční výchylce $x_0 = 0,001$ m, $y_0 = -0,4$ m. Tomu odpovídají hodnoty periody příčných kyvů $T_{\text{kyvy}} = 0,98$ s a periody podélných kmitů $T_{\text{kmitů}} = 0,49$ s. Program PRU umožňuje přibližně zobrazení rezonančního stavu i při jiném nastavení parametrů, například: $m = 0,35$ kg, $k = 26,6$ N/m, $l = 0,51$ m. Avšak již malá změna uvedených parametrů vede k chaotickému pohybu pružinového kyvadla.

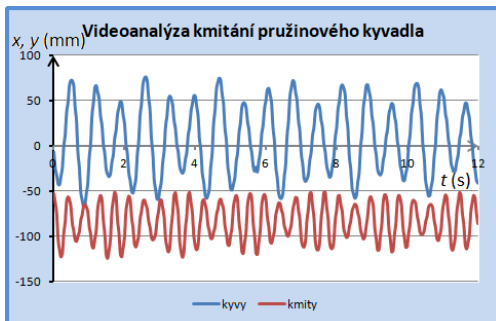
Dosud jsme se zabývali pružinovým kyvadlem teoreticky. Můžeme si položit otázku, zda lze získané poznatky o rezonanci dvou modů kmitání pružinového kyvadla ověřit také praktickým experimentem. Ukážeme postup, který může být inspirativní i pro samostatné žákovské práce. Pohyb kyvadla budeme sledovat pomocí tzv. videoanalýzy (viz [8]), která slouží k analýze obrazového záznamu pohybu pořízeného digitální kamerou, popř. i mobilem nebo tabletem. Důležité je, aby těleso kyvadla bylo opatřeno barevnou značkou, která je kontrastní vzhledem pozadí (obr. 14a). Pro účely videoanalýzy existuje několik programů, z nichž nejlepší výsledky lze získat programem *Tracker* [9].

Možnosti úpravy pružinového kyvadla tak, aby byly splněny podmínky pro vznik rezonančních kmitů, jsou omezené. U běžně používaných pružin nemáme totiž možnost podle potřeby nastavovat jejich délku a měnit tuhost pružiny. Jako částečně měnitelný tak zůstává jediný parametr, tzn. hmotnost kmitajícího tělesa. V našem případě byla hmotnost upravována přidáváním feritových magnetů k ocelovému válečku, který tvořil těleso kyvadla. Tímto způsobem bylo možné nastavit podmínky rezonance jen přibližně. Doba trvání obrazového záznamu je přibližně 25 s (snímací frekvence 25 snímků/s, tzn. perioda 40 ms). Pro přehlednost je k zobrazení trajektorie využito 100 snímků (obr. 14b) z celkových 625 snímků.



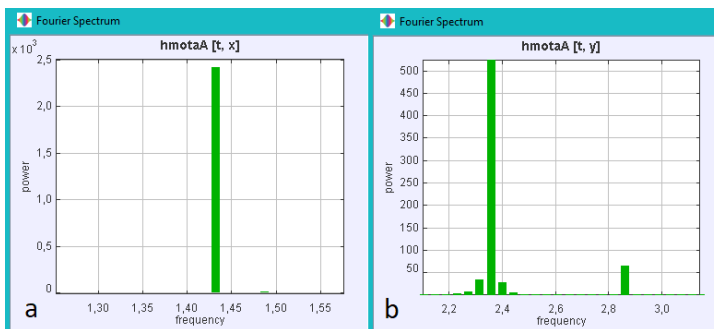
Obr. 14 Videoanalýza kmitání pružinového kyvadla

Okamžité hodnoty kinematických veličin pohybu kyvadla jsou programem zaznamenány do tabulky, kterou lze exportovat do programu MS Excel. Výsledek videoanalýzy pružinového kyvadla je na obr. 15. Z časových diagramů příčných kyvů a podélných kmitů jsou patrné charakteristické rázy spřažených oscilátorů, ale současně je zřejmé, že přesné rezonance nebylo dosaženo.



Obr. 15 Časový diagram kmitání pružinového kyvadla

Program Tracker umožňuje i další analýzu získaných dat. Např. lze určit Fourierovou analýzou základní frekvenci periodických pohybů. Tak bylo zjištěno, že základní frekvence příčných kyvů $f_{kyvy} = 2,38$ Hz a podélných kmitů $f_{kmity} = 1,43$ Hz (obr. 16). To znamená, že poměr frekvencí obou modů kmitání je 5 : 3. Můžeme si však povšimnout, že ve spektru podélných kmitů (obr. 16b) se objevuje také frekvence odpovídající přesně dvojnásobku frekvence příčných kyvů, čili rezonančnímu stavu.



Obr. 16 Fourierova analýza kmitání pružinového kyvadla

Závěr

Ukázali jsme, že i současná fyzika může mít zájem o studium zdánlivě jednoduchých dynamických systémů, které vykazují neobvyklé chování. U řady nelineárních dynamických systémů je fázový portrét těchto oscilátorů označován jako *podivný atraktor*. Jejich studiem se zabývá relativně nová disciplína – *deterministický chaos*. Základní informaci o tomto zajímavém oboru fyziky lze získat např. v publikaci [10, s. 154–176].

Literatura

- [1] *Lepil, O.*: Rezonanční křivka – portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 3, s. 201–213. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/29/2903/mfi_2903_201_213.pdf
- [2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2018.
- [3] *Kittel, Ch., Knight, W. D., Ruderman, M. A.*: Berkeley Physics Course. Mechanics. Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [4] *Butikov, E. I.*: Oscillations of a simple pendulum with extremely large amplitudes. European Journal of Physics, vol. 33 (2012), p. 1555–1563. Dostupné na: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/33/6/1555/pdf>
- [5] *Havránek, A., Čertík, O.*: Pružné kyvadlo. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 198–216. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/141318>
- [6] *Dvořák, L.*: Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 4, s. 312–327. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/141331>
- [7] *Lepil, O., Richterek, L.*: Dynamické modelování. Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf
- [8] *Lepil, O.*: Videoanalýza jako prostředek didaktické komunikace ve výuce fyziky. Dostupné na: <http://ufyz.sgo.cz/show-file/87/>
- [9] <https://physlets.org/tracker/>
- [10] *Lepil, O.*: Deterministický chaos. In: Fyzika aktuálně – příručka nejen pro učitele, Prometheus, Praha, 2009.