Řečkovice, 20 b., Michal Kodad, 4/4, Smíchovská SPŠ, Praha 5, 18 b., Jindřich Matuška, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 18 b., Klára Pernicová, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 17 b., Adéla Heroudková, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 14 b., Jiří Kvapil, 6/8, G, Olomouc-Hejčín, 14 b., Zdeněk Pezlar, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 14 b., Robert Gemrot, 7/8, G, Komenského, Havířov, 13 b., Jakub Ambroz, 8/8, G, Jírovcova, České Budějovice, 12 b., Jana Bušová, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 12 b., František Kmječ, 8/8, G, J. S. Machara, Brandýs nad Labem, 12 b., Štěpán Konšel, 3/4, G, Arabská, Praha 6, 7 b., Darian Poljak, 7/8, G J. Škody, Přerov, 7 b., Lucie Vomelová, 8/8, G, Špitálská, Praha 9, 7 b., Jakub Kučera, 3/4, G, Arabská, Praha 6, 5 b.

Podrobné informace o celém 69. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na adrese http://mo.mff.cuni.cz/. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

*Pavel Töpfer*

## 9. evropská dívčí matematická olympiáda

Devátý ročník Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO) se uskutečnil ve dnech 15.–21. dubna 2020. Vzhledem k probíhající pandemii covid-19 nizozemští organizátoři zvažovali několik možností, nakonec soutěž uspořádali v původním termínu virtuálně. Podle možností jednotlivých zemí se buď týmy ve své zemi sešly na jednom místě, kde soutěž řešily pod dohledem vedoucích, nebo (jako v případě České republiky) účastnice řešily soutěž doma pod dohledem dospělého dohlížitele. Soutěže se zúčastnilo 203 žákyň z 53 zemí pěti kontinentů, mezi nimi bylo 39 evropských států.

České reprezentační družstvo středoškolaček bylo sestaveno na základě výsledků krajského kola kategorie A 69. ročníku po centrální koordinaci. Vzhledem k loňské situaci, kdy se kvůli termínu maturit nemohly soutěže zúčastnit žákyně maturitních ročníků, nebylo velkým překvapením, že čtveřice účastnic letošního ročníku byla stejná jako loni. Místa v reprezentaci si vybojovaly: *Adéla Heroudková* (6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (7/8, G J. Keplera, Praha 6), *Michaela Svatošová* (8/8, G M. Koperníka, Bílovec) a *Adéla Karolína Žáčková* (6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucím české delegace byli *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* z MFF UK v Praze a *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z PřF UP v Olomouci.

Absolutní vítězkou soutěže se stala *Amina Abu Shanab* z Rumunska. Našim reprezentantkám se podařilo zopakovat velmi dobré loňské výsledky. *Magdaléna Mišinová* obhájila v této prestižní soutěži loňskou zlatou medaili, což v celkovém pořadí znamenalo (dělené) 7. místo absolutně a (dělené) 6. místo mezi evropskými účastnicemi (vloni 8. resp. 7.). Zbylé reprezentantky stejně jako vloni obsadily místa těsně pod hranicí bronzové medaile. Nejlepší z nich byla *Michaela Svatošová*, která získala dělené 113. místo absolutně, 83. v Evropě, a navíc obdržela čestné uznání za úplné řešení alespoň jedné úlohy (vloni 130 resp. 94. a ČU), stejné místo obsadila také *Adéla Karolína Žáčková*, ovšem již bez čestného uznání (vloni 137. resp. 99. a ČU). Oběma chyběl k zisku bronzové medaile jediný bod stejně jako vloni *Adéle Heroudkové*, která se letos umístila na 146. místě absolutně a 105. mezi Evropankami (vloni 113. resp. 81. a ČU). V oficiálním pořadí zemí tak Česká republika získala 19. místo absolutně, což znamenalo 14. místo mezi evropskými zeměmi, a nepatrně tak vylepšila loňské umístění (22. resp. 16.). Vítězkami v pořadí zemí se letos staly ruské žákyně. Podrobnější informace o výsledcích soutěže najdete v oficiální výsledkové listině (`https://www.egmo.org/egmos/egmo9/scoreboard/`).

Vzhledem k pandemii připravili nizozemští organizátoři pro soutěžící bohatý virtuální program, kterého se všichni mohli zúčastnit pomocí aplikací na sociálních sítích. Nechyběl v něm ani tradiční tradiční nástup zemí, ani závěrečný ceremoniál, mimo to obsahoval spoustu diskusních míst, her a prohlídek významných nizozemských atrakcí.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh, jejichž oficiální řešení (v angličtině) najdete na:

`https://www.egmo.org/egmos/egmo9/solutions.pdf`.

**První soutěžní den**

**1.** Přirozená čísla $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots, a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$$

pro $n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots, a_{3030}$ je dělitelné $2^{2020}$.

**2.** Najděte všechny posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nezáporných reálných čísel splňující současně následující tři podmínky:

(i) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2020}$;
(ii) $x_{2020} \le x_1 + 1$;
(iii) existuje taková permutace $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ posloupnosti $(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_{2020})$, že

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

*Permutace posloupnosti je posloupnost téže délky se stejnými členy, které však mohou být v libovolném pořadí. Například* $(2, 1, 2)$ *je permutací* $(1, 2, 2)$ *a obě jsou permutacemi posloupnosti* $(2, 2, 1)$. *Speciálně, každá posloupnost je permutací sebe sama.*

**3.** Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující

$$|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|,$$
$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EFA|$$

a ve kterém osy vnitřních úhlů u vrcholů $A$, $C$ a $E$ procházejí týmž bodem. Dokažte, že také osy vnitřních úhlů u vrcholů $B$, $D$ a $F$ procházejí společným bodem.

*Zde* $|\sphericalangle FAB|$ *značí velikost úhlu* $FAB$. *Podobně jsou značeny velikosti ostatních vnitřních úhlů šestiúhelníka.*

**Druhý soutěžní den**

**4.** Permutace celých čísel $1,\ 2, \ldots, m$ se nazývá *svěží*, právě když neexistuje žádné přirozené číslo $k < m$ takové, že prvních $k$ členů permutace je $1, 2, \ldots, k$ v nějakém pořadí.

Nechť $f_m$ je počet svěžích permutací celých čísel $1, 2, \ldots, m$. Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí nerovnost

$$f_n \geq n \cdot f_{n-1}.$$

*Například pro* $m = 4$ *je permutace* $(3, 1, 4, 2)$ *svěží, zatímco permutace* $(2, 3, 1, 4)$ *svěží není.*

**5.** Uvažujme trojúhelník $ABC$ v němž $|\sphericalangle BCA| > 90^\circ$. Kružnice $\Gamma$ opsaná trojúhelníku $ABC$ má poloměr $R$. Uvnitř úsečky $AB$ leží takový bod $P$, že $|PB| = |PC|$ a délka úsečky $PA$ je $R$. Osa úsečky $PB$ protíná $\Gamma$ v bodech $D$ a $E$. Dokažte, že bod $P$ je středem kružnice vepsané trojúhelníku $CDE$.

**6.** Buď $m > 1$ přirozené číslo. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je definována takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ a pro všechna $n \geq 4$ platí

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Určete všechna přirozená čísla $m$, pro která jsou všechny členy posloupnosti druhými mocninami přirozených čísel.

Více informací najdete na oficiálních stránkách soutěže

https://www.egmo.org/

a na stránkách letošního ročníku

https://egmo2020.nl/.

Příští ročník soutěže se bude konat v gruzínském městě Kutaisi.

*Pavel Calábek*