MATEMATIKA

Peer instruction a výuka podobnosti

TOMÁŠ ZADRAŽIL

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cesta k peer instruction

Roku 1984 začal *Eric Mazur* vyučovat na Harvardu úvodní kurzy fyziky pro mediky. Před první přednáškou jej ani nenapadlo zabývat se otázkou, jakým způsobem bude vyučovat. Bylo mu jasné, že bude přednášet. Jediné, co jej trápilo, byla volba textu, okolo kterého bude soustředit svůj výklad.

K zamyšlení: Zkusme si vzpomenout, jakými otázkami jsme se zabývali my, než jsme poprvé vkročili do třídy se záměrem vyučovat. Zabývali jsme se spíše obsahem, nebo formou?

Hlouběji přemítat nad kvalitou výuky jej přimělo až sdělení v příspěvku [2]: „Vysokoškolské kurzy fyziky nemají takřka žádný dopad na vstupní (ne)porozumění studentů.“ Poselství článku se opíralo o tisíce dat, a tak nad ním Mazur, coby vědec, nemohl jen tak mávnout rukou.

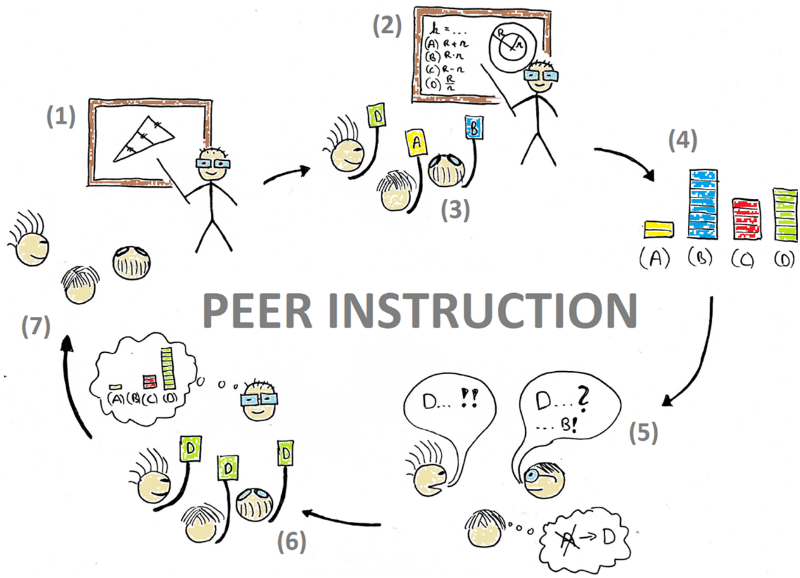
Naštěstí byl k článku připojen i test FCI (Force Concept Inventory) užitý autory pro sběr dat.

Těžko slovy popsat, jak se profesor Mazur cítil krátce poté, co obdržel výsledky svých studentů. Většina dopadla stěží lépe „než gorila náhodně stlačující klávesy na klávesnici“ [3]. Nabízela se pouze dvě možná východiska. Vinit test a nepříznivé zjištění ignorovat, nebo kompletně přehodnotit svůj přístup k výuce. Eric Mazur se rozhodl pro druhou variantu, a zanedlouho poté vytvořil vlastní výukovou metodu *peer instruction.*

K zamyšlení: Jak bychom v podobné situaci, tj. tváří tvář zjištění, že jsme své žáky dovedli pouze ke stavu, kdy jsou schopni užívat formule a postupy, aniž by doopravdy rozuměli jejich podstatě, reagovali my?

Metoda peer instruction

Samotný název metody, *peer instruction* (volně přeloženo jako vrstevnické vyučování), reflektuje skutečnost, že není zcela správné o *peer instruction* (dále jen *PI*) hovořit jako o vyučovací technice, ale spíše jako o metodě aktivního učení. Pro *PI* je příznačný důraz na proces učení se žáků, nebo studentů (dále jen žáků). Veškeré aspekty procesu vyučování podle *PI* pak lze vyjádřit pomocí následujícího schématu jednoho vyučovacího bloku [3], viz obr. 1.



Obr. 1 Schéma jednoho bloku *PI*

Učitel nejprve zvolí, jakému *konceptu* (nosnému pojmu, principu, myšlence) se bude třída v rámci bloku věnovat. Blok poté zahájí (1) krátkým výkladem nebo prezentací, přičemž se snaží vyhnout vzorcům, početním postupům nebo jiným mnemotechnickým berličkám odvádějících pozornost od ryzího porozumění. Po představení *konceptu* následuje (2) položení otázky cílené na testování či prohloubení porozumění probíranému *konceptu* s několika nabízenými odpověďmi (tento typ otázek budeme dále zvát *KoncepTesty*). Žáci (3) si nejprve samostatně promyslí své odpovědi, a poté je učiteli sdělí prostřednictvím hlasovacích karet, chytrých telefonů, nebo jiných zařízení uzpůsobených pro hlasování. Na základě rozložení odpovědí žáků (4) vyučující volí další krok. Při vysokém počtu hlasů pro správnou variantu (nad 70 %) může třída rovnou přejít k (7) vysvětlení řešení učitelem nebo některým žákem. V opačném případě, kdy je správných odpovědí nedostatek (pod 35 %), bude zřejmě nutné opakovaně *koncept* vysvětlit, studentům napovědět, nebo zadat snazší *KoncepTest*. Poslední variantu (správných odpovědí 35–70 %) představují skupinové diskuze, kdy vyučující žáky vyzve, aby nalezli (ideálně) jinak odpovídající spolužáky a snažili se je přesvědčit o správnosti svého stanoviska. Diskuze jsou zakončeny výzvou k opětovnému hlasování (6), ve kterém žáci revidují své odpovědi. Druhé hlasování obvykle přináší signifikantní nárůst hlasů ve prospěch správné varianty [6]. Daný *KoncepTest* je poté uzavřen stručným vysvětlením řešení úlohy (7). Výzkumy [6] ukazují, že výuka realizovaná pomocí *PI* vede ke znatelně vyšším učebním ziskům než klasický výklad (tj. žáci více využijí svůj potenciál pro zlepšení svého počátečního (ne)porozumění).

K zamyšlení: Z řady studií [6] vyplývá, že se od sebe navzájem tímto způsobem žáci dokáží učit efektivněji, než by se učili z výkladu učitele. Jaké pro to mohou být důvody?

Tuto otázku si mimořádně zodpovíme i společně. Konečně, odpověď není vůbec složitá. Představme si modelovou situaci, kdy se správně odpovídající Ctibor pokouší svůj názor obhájit nesprávně uvažujícímu spolužáku Borisovi. Oba chlapci jsou k sobě otevřenější, než by byli vůči vyučujícímu a navíc hovoří velmi podobným jazykem. Boris má (z pochopitelných důvodů) problém uvést pádné argumenty pro svou mylnou představu. Naproti tomu Ctiborovo porozumění danému problému je čerstvé, a proto si živě pamatuje, jaké překážky musel překonat, než se tohoto stavu dobral. Ctibor je tedy nejen schopný Borise dovést k porozumění, ale je schopen toho dosáhnout snáze než sám učitel. Pro vykreslení sdělení tohoto odstavce uveďme dva doslovné přepisy žákovských sdělení (získáno v rámci vlastního výzkumu implementace *PI*):

„Ono to bavení v té skupině.. jakože ten, co se to snaží vysvětlit, takže my jako nevíme, jestli to má dobře nebo ne, takže se nad tím snažíme více přemýšlet, než když nám to ukazujete vy (učitel), protože my víme, že vy, jakože vy, to máte dobře.. a tak nad tím, jakože, tolik nepřemýšlíme.“

„Vona (spolužačka) mi to.. Vona jak mluvila, tak to kreslila. A jak jsem se na to jako koukala, a pak jsem to jako slyšela, tak jsem přišla na to, proč to tak je.“

Poznamenejme, že během skupinových diskuzí učitel může korzovat mezi diskutujícími skupinami a „naslouchat myšlenkám svých žáků“. Může se tak dozvědět, co jim dělá problémy, čemu jak (ne)rozumí a proč. Učitel rovněž může, v případě potřeby, do některých diskuzí vstoupit, katalyzovat je či usměrnit správným směrem vhodnými doplňujícími dotazy.

K zamyšlení: Jak často se nám v naší praxi stává, že se podivujeme, když naši žáci nechápou něco „tak očividného“ i když to „vysvětlíme snad po stopadesáté“? Právě pro tento stav mysli existuje v zahraničí termín „curse of knowledge“ (kletba vědomosti).

Po třech letech vlastní (výzkumné) praxe

Pomocí *PI* již třetím rokem vyučuji matematiku na nižším gymnáziu (ekvivalent druhému stupni ZŠ). Novou látku takřka vždy představuji právě ve smyslu schématu na obr. 1. Z mých záznamů vyplývá, že *PI* věnuji v průměru každou třetí až čtvrtou vyučovací hodinu. Souběžně s výukou realizuji, v rámci své disertace, akční výzkum (projekt GA UK č. 680119), v rámci kterého se snažím rozhodnout, zda je možné uspokojit předpoklady pro implementaci *PI* ve výuce matematiky na úrovni druhého stupně základní školy (uspokojivé sociální dovednosti pro vedení plodné skupinové diskuze, atd.) a zda je možno dosáhnout podobných výsledků, jaké přislibují studie *PI* ve výuce fyziky nebo na úrovni vysoké školy (prohloubení konceptuálního porozumění, zlepšení postojů vůči předmětu, navýšení argumentačních dovedností, atd.). Metodu *PI* se snažím pravidelně popularizovat v rámci tuzemských i zahraničních konferencí. Postřehy a výsledky, které budou zmíněny v této sekci, tedy stojí na několika letech výzkumné, popularizační a školské praxe.

Nejprve si uvedeme několik stručných poznámek k popsanému vyučovacímu bloku *PI* jako celku.

- Časová náročnost prezentace nového *konceptu* (1) se odvíjí od volby aktivity, kterou pro tyto účely zvolíme. Zadání *KoncepTestu* s navazujícím hlasováním a diskuzí trvá přibližně 8–15 minut, podle náročností konkrétní otázky a naší ochoty nechat žáky nad problémem diskutovat.
- Není dobrý nápad ukazovat žákům výsledky prvního hlasování, než se přikročí ke skupinovým diskuzím. Obzvláště „tvárnější žáci“ mohou nabýt mylného přesvědčení, že správná je odpověď s nejvyšší četností, a během diskuze pak tito pozbudou snahy své stanovisko zdůvodnit (tato zkušenost je v souladu se zahraničními studiemi [6]).

- Výzkumy obsažené v rešeršní práci [6] ukazují, že vypuštění kteréhokoliv z kroků (1)–(7), či jeho zásadní modifikace, obvykle vede ke snížení efektivity *PI*. (Na základě série provedených experimentů, jako vypuštění prvního, druhého, nebo obou hlasování, se plně přikláním k pravdivosti tohoto stanoviska.)

Nyní již komentáře k jednotlivým krokům bloku (1)–(7):

- Je-li to možné, nové *koncepty* představujme skrze skupinové aktivity v duchu (řízeného) objevitelského přístupu. (Při klasickém výkladu je mnohem obtížnější *koncept* dostatečně uchopit a zároveň se vyhnout vzorcům a poučkám. Zkušenost navíc ukazuje, že během klasického výkladu řada žáků nad sdělením dostatečně nepřemýšlí.)
- Zpočátku není snadné vymýšlet vlastní *KoncepTesty*. (Tomuto tématu je věnován konferenční příspěvek [8].)
- Na rozdíl od fyziky, kde se žáci běžně setkávají s jevy, o kterých již mají představu z běžného života (takzvanou *prekoncepci*), je pro ně v matematice řada *konceptů* zcela nová. Zahraniční studie [1, 5] provedené na poli matematické analýzy na vysoké škole proto doporučují zadávat sérii *KoncepTestů* se stupňovanou obtížností, aby bylo porozumění žáků budováno postupně. Tento přístup se mi rovněž osvědčil ve vlastní výuce.
- Zásadnímu významu hlasování je věnován příspěvek [9]. Uveďme ve stručnosti některé obsažené výsledky:
  - *„Pro některé žáky hlasování představuje příjemné zpestření a možnost vyjádřit se. Pro jiné žáky pak ztělesňuje nepříjemný diskomfort a nutnost zaujmout nějaké stanovisko. Hlasování také můžeme chápat jako negativní či pozitivní motivaci pro přemýšlení během ostatních* PI *aktivit, ale i jako aktivitu, při které přemýšlení probíhá, tedy jako činnost kogitace i její hnací pohon (napětí).“*
  - *„Je-li hlasování vyřazeno, vede to k celkovému snížení efektivity techniky PI.“*
  - *„Druhé hlasování pro žáky představuje možnost opravy, pokud se v případě prvního hlasování spletou, a s vidinou této možnosti pak pro ně první hlasování není tolik stresující. Dalším faktorem zmírňujícím negativní složku napětí je zabezpečení anonymity jak během hlasování, tak i v průběhu skupinových diskuzí. V případě skupinových diskuzí chápeme anonymitu tak, že je žákům umožněno skupiny*

tvořit zcela svobodně, tedy na základě jejich osobních preferencí. Žáci si tak logicky vybírají pouze komunikační partnery, jejichž kritice jsou ochotni podrobit svůj názor a ne žáky, jejichž případného posměchu se obávají. Anonymitu hlasování pak zajišťuje právě vhodná volba prostředku hlasování, a sice chytré telefony, nebo alespoň vhodně upravené hlasovací karty.“

- Sociální dovednosti žáků mohou být nedostatečně rozvinuty z hlediska jejich zapojení v skupinové diskuzi [7]. Rovněž mohou existovat žáci (a pravděpodobně i existovat budou), kteří za sebe během diskuzí nechají pracovat ostatní a „takříkajíc se vezou“ [1], [4]. Oba uvedené jevy osobně vnímám jako největší úskalí efektivní implementace *PI* v prostředí ZŠ–SŠ. Úroveň sociálních dovedností je však možné navýšit tréninkem, jehož se, jak naznačují dále přiložené výroky, po čase dožadují sami žáci (získáno v rámci vlastního výzkumu implementace *PI*):

  „No tak jako má to smysl, alespoň se jako utvrdím v tom, že to mám dobře, že to jako chápu, nebo že to chápeme jako celek. . . “

  „No, třeba si to jako procvičit jakože něco jednoduchýho, abysme pak byli připravený na ty těžší. Že jako. Tak jako sportovec se taky nejdřív rozcvičí než jako půjde běhat nějakou dálku.“

  „Já nevím tím pádem jestli můžu. Jakože né vždycky na to přijdem tím způsobem, jakým bychom měli. Ale myslíme si, že je to nějak jinak nebo.. eem.. to zkoušíme nějakým jiným způsobem, ale vyjde nám to stejně, tak jak by to mělo, ale je to špatně udělaný, jakože to náhodou vyjde jakože správně, nebo je špatnej postup, ale správnej výsledek.“

  Právě z důvodu tréninku sociálních dovedností nechme žáky diskutovat i nad „snazšími“ úlohami.

- Učební zisk jednotlivých žáků se odvíjí od typické role, kterou během skupinových diskuzí zaujímají [10]. V rámci výzkumu se podařilo identifikovat tyto základní role [10]:

  Statistici/Pasažéři: Do této skupiny patří žáci, kteří nemají ani potřebu dominovat skupinovým diskuzím ani potřebu dobrat se správného řešení daného *KoncepTestu*. Diskuzí se obvykle účastní tak, že mlčky přejímají názor od dominantního řečníka nebo od poradce ve své skupině. Rovněž je pro ně typická praktika bezmyšlenkovitého „zkopírování“ odpovědi s nejvyšší četností po prvním hlasování.

Dominantní řečníci: Tito žáci se zpravidla jako první ujímají slova a zpravidla mají i slovo poslední. Je pro ně tedy typická vysoká potřeba dominovat diskuzi, ale rovněž i snaha dobrat se správnému řešení úlohy. Obvykle jde o matematicky schopnější žáky (z pohledu třídy).

Poradci: Pro *poradce* je příznačná vysoká snaha dobrat se správného řešení problému. Na rozdíl od dominantních řečníků tito žáci nemají potřebu určovat směr diskuze. Pro poradce jsou daleko typičtější doplňující otázky a zpřesnění stanovisek spolužáků. Rovněž jde obvykle o matematicky schopnější žáky (z pohledu třídy).

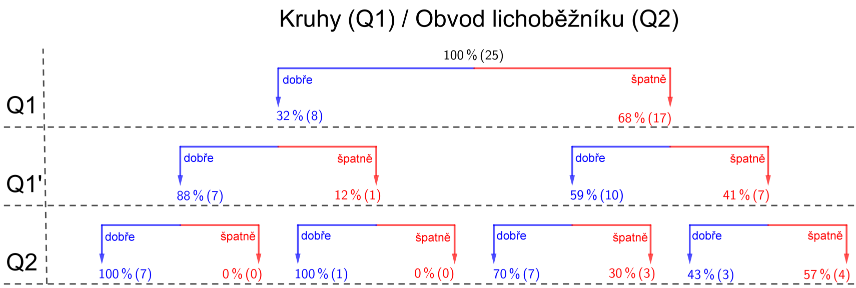
Standardní diskutéři: Do této skupiny patří žáci, kteří se účastní diskuzí kýženým způsobem. Tedy pozorně naslouchají druhým a do diskuze rovněž sami přispívají. Z hlediska dominance a snahy dobrat se řešení úlohy se pohybují někde mezi *dominantními řečníky* a *poradci.*

- V uplynulém kalendářním roce (2019) se podařilo ukázat, že učební zisk jednotlivce úzce souvisí s jeho typickou rolí, kterou zaujímá během skupinové diskuze [10]. Nikoho tak zřejmě nepřekvapí, že nízký učební zisk je typický pro *pasažéry*, střední pro *standardní diskutéry* a vysoký pro *poradce* a *dominantní řečníky.*
- V souladu s [1] a [4] považuji za nutné běžné schéma *PI* doplnit o chytrý způsob formování skupin. V rámci výuky podobnosti jsme se třídou zkoušeli následující mechanismus: žáci jsou po prvním hlasování vyzváni, aby nad *KoncepTestem* diskutovali nejprve ve dvojici se sousedem, a teprve poté je nechám utvořit větší diskuzní skupiny, jako je tomu při standardním průběhu *PI.* Na základě zpětné vazby žáků lze tvrdit, že tento model i nadále zachovává princip anonymity diskuzí (spolusedícího si každý obvykle volí svobodně) a že jim tento model vyhovuje více než klasický (mohou problém předdiskutovat a do „velké diskuze“ vstupují lépe připraveni.) Předběžné mezivýsledky rovněž ukazují, že představený model přináší navýšení průměrného učebního zisku a lehké uhlazení rozdílů mezi jednotlivými diskuzními rolemi (co do učebního zisku).

K zamyšlení: Jak poznáme, že naši žáci pouze bezduše nekopírují názory svých matematicky zdatnějších kolegů?

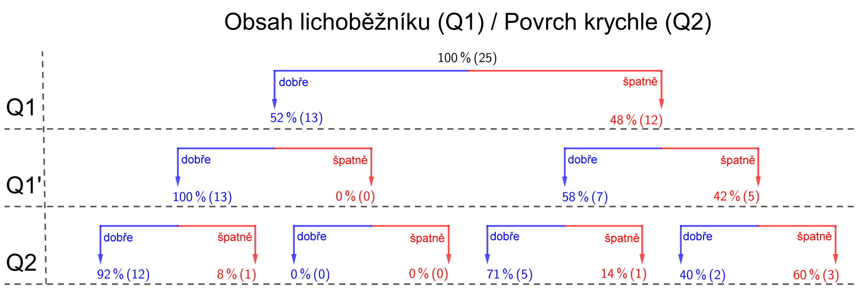
Tuto otázku slýchám poměrně často v rámci didaktických konferencí. Jedna možnost, jak se dobrat odpovědi již byla zmíněna – stačí pozorně naslouchat myšlenkám žáků během skupinových diskuzí. Další způsob představuje zařazení *KoncepTestů* do průběžných testů po bok klasickým otázkám. Poslední variantu skýtá posloupnost po sobě jdoucích *KoncepTestů* s narůstající obtížností cílených na tentýž *koncept*.

Na obr. 2 je schematicky znázorněn proces odpovídání (z hlediska dobře/špatně) v posloupnosti dvou navazujících otázek o stupňované obtížnosti (tj. na stejný *koncept*.) Přičemž Q1 představuje odpověď na první otázku v prvním hlasování, Q1' odpověď na první otázku v revidovaném hlasování a Q2 pak odpověď v prvním hlasování navazujícího *KoncepTestu*. Zeleně je zvýrazněna zajímavá situace. Ze 17 původně nesprávně odpovídajících žáků (na první otázku) jich 10 vlivem diskuze přehodnotilo svou odpověď na správnou, a z těchto 10 pak 7 odpovědělo správně i při prvním hlasování u těžší navazující otázky.



Obr. 2 Schéma procesu odpovídání pro dvě navazující úlohy I

Obdobnou situaci znázorňuje i schéma na obr. 3, které se však týká těžších *KoncepTestů* zaměřených na vztah mezi koeficientem podobnosti a obsahem podobných útvarů.



Obr. 3 Schéma procesu odpovídání pro dvě navazující úlohy II

Z obr. 2 a 3 je patrné, že v obou případech přibližně 70 % žáků, kteří u první otázky opravili svou odpověď ze špatné na správnou, dokázalo své poznatky získané v diskuzi využít i pro správné určení odpovědi otázky navazující. Lze rovněž konstatovat, že většina žáků, kteří zachovávají svou správnou odpověď i po skupinové diskuzi, odpovídá správně i v případě navazující úlohy. (*KoncepTesty* Kruhy, Obvod lichoběžníku, Obsah lichoběžníku, Povrch krychle, zmíněné na obr. 2 a 3, můžeme nahlédnou v navazující sekci.)

Podobnost v pojetí peer instruction

V této sekci si ukážeme možné uchopení *konceptu* (matematické) podobnosti pomocí metody *PI*. Zvláštní důraz bude přitom kladen na význam koeficientu podobnosti k. (Obsažené úlohy pocházejí od autora příspěvku a všechny byly opakovaně vyzkoušeny v rámci výuky v tercii víceletého gymnázia, tj. v 8. ročníku ZŠ.)

K zamyšlení: Často máme pocit, že téma, které žákům představujeme, respektive otázky, které jim pokládáme, jsou triviální. Před prohlédnutím přiložených grafů znázorňujících dynamiku žákovských odpovědí se vždy zamysleme, jaké procento správných odpovědí bychom v prvním hlasování očekávali.

Obvykle se nejprve žáků dotazuji na (matematickou) shodnost, se kterou se již setkali. Krátkou diskuzi se snažím nasměrovat k formulaci následující definice: *Řekneme, že dva útvary jsou (matematicky) shodné, pokud se dají položit jeden na druhý tak, že se dokonale kryjí.*

Osobně považuji za důležité zpočátku doplňovat, pro někoho snad nadbytečné, slovo „matematicky“ a to právě kvůli podobnosti, jíž je věnována navazující diskuze.

K zamyšlení: Jak zní věta: „Všechny obdélníky jsou si podobné?“ Působí jako nesmysl, nebo na ní něco pravdivého bude?

Řekneme, že dva útvary jsou (matematicky) podobné, pokud by bylo možné jeden z nich zmenšit/zvětšit beze změny proporcí tak, že by byl (matematicky) shodný s tím druhým.

V tomto okamžiku již žáci disponují potřebnými definicemi pro první trio *KoncepTestů* (správná odpověď je vždy zvýrazněna zeleně):

Podobnost 01

Mezi následujícími tvrzeními zvol pravdivé.

(A) Jsou-li si útvary podobné, pak jsou i shodné.

(B) Jsou-li útvary shodné, pak jsou si i podobné.

(C) Útvary jsou si podobné jedině a pouze tehdy, jsou-li navzájem shodné.

(D) Ani jedno z tvrzení (A)–(D) není pravdivé.

Během dříve realizované diskuze mnohdy zaznívají termíny jako „obraz“ či „fotografie“, a je tedy zřejmé, že někteří žáci si uvědomují, že lze uvažovat i zvětšení v poměru 1 : 1. Díky úloze Podobnost 01 k této představě dospějí i ostatní žáci. Můžeme proto definici doplnit o odpovídající poznámku a pokračovat k navazující úloze.

Podobnost 02

Adolf tvrdí, že jsou si všechny obdélníky podobné. Boris hlásá, že jsou si podobné všechny pravoúhlé trojúhelníky. Ctibor se musí rozhodnout, komu má dát za pravdu.

(A) Pouze Adolfovi.

(B) Pouze Borisovi.

(C) Adolfovi i Borisovi.

(D) Ani Adolfovi ani Borisovi.

Právě úloha Podobnost 02 ukazuje výhodu počátečního důrazu na zmíněný přídomek „matematicky“. Z přiloženého grafu na obr. 4a je zřejmé, že více než polovina žáků zpočátku nesprávně považovala všechny obdélníky/pravoúhlé trojúhelníky za (matematicky) podobné (Pro oblasti grafů na obr. 4–8 platí: oblast Dobře–Dobře zastupuje žáky, kteří odpověděli správně v prvním i ve druhém hlasování; oblast Dobře–Špatně pak žáky, kteří ze správné změnili svou odpověď na nesprávnou; oblast Špatně–Špatně žáky, kteří se dvakrát mýlili; konečně oblast Špatně–Dobře žáky, kteří se z nesprávné odpovědi opravili na správnou).

Stín a výška pyramidy

Uvažme, že pyramida je pravidelný čtyřboký jehlan o délce podstavné hrany 230 metrů. V okamžik, kdy délka našeho stínu odpovídá naší výšce, sahá stín pyramidy do vzdálenosti 31 metrů od základny pyramidy. Rozhodněte, jak vysoká je pyramida?

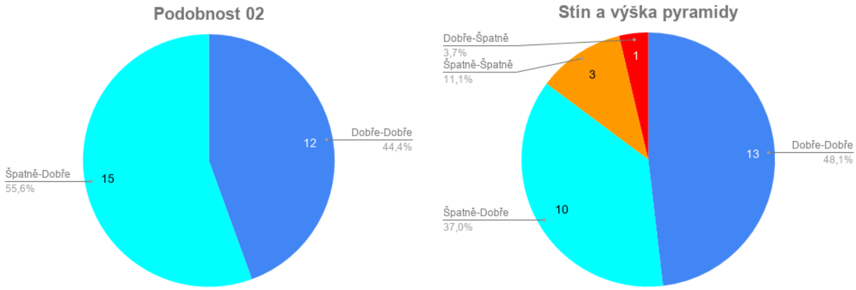
(A) 31 metrů.

(B) 146 metrů.

(C) 261 metrů.

(D) $>$ 261 metrů.

(E) Na základě těchto údajů nelze rozhodnout.



(a) Podobnsot02 (b) Obvod lichoběžníku

Obr. 4 Dynamika hlasování pro první dvojici úloh

Po této úloze pokládám za vhodné diskutovat s žáky, zda bychom mohli považovat podobnost za zobrazení (s funkcí obvykle pracuji na obecnější úrovni, než je na ZŠ zvykem). Následuje společná formulace definice podobnosti zohledňující koeficient podobnosti.

Podobnost je zobrazení, ve kterém je vzorem geometrický útvar a jeho obrazem pak jeho přesná, či zmenšená/zvětšená kopie.

Uvedenou definici je vhodné doplnit o názornou ilustraci a úmluvu, že vzor bude označován nečárkovaně a obraz čárkovaně (tj. ve smyslu $ABCD$ a $A'B'C'D'$). Poté je již na řadě definice koeficientu podobnosti.

Vzdálenost každých dvou bodů obrazu odpovídá k-násobku jejich původní vzdálenosti. Číslo k zveme koeficient podobnosti.

(Skutečnost, že je k kladné je implicitně obsažena v textu, neboť většina žáků si je obvykle vědoma faktu, že obě diskutované vzdálenosti jsou kladné, a tedy i zmiňované číslo k musí být kladné.)

Jakmile žáci disponují základní představou o koeficientu podobnosti, přichází řada na sérii úloh věnovaných jejímu rozšíření.

Kruhy

Uvažme dva kruhy $K(A;m)$ a $K'(B;n)$, přičemž $m > n$. Co platí pro koeficient jejich podobnosti?

(A) $k = m + n$

(B) $k = |m - n|$

(C) $k = |n - m|$

(D) $k = mn$

(E) $k = \frac{m}{n}$

(F) $k = \frac{n}{m}$

Obvod lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obvod 240 cm. Jaký obvod má jeho obraz $A'B'C'D'$ v podobnosti s koeficientem $k = \frac{3}{2}$?

(A) menší než 160 cm

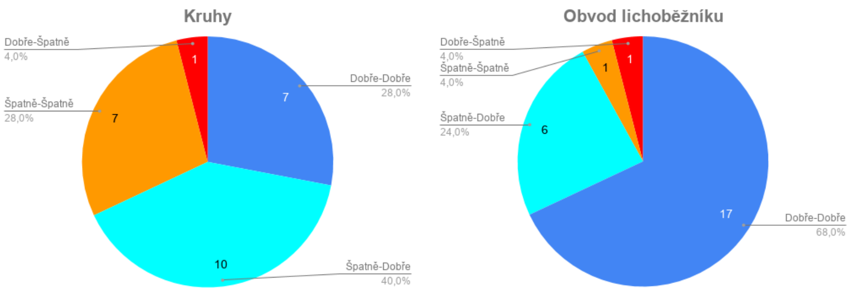
(B) 160 cm

(C) mezi 160 cm a 360 cm

(D) 360 cm

(E) větší než 360 cm

(F) nelze rozhodnout



(a) Podobnsot02 (b) Obvod lichoběžníku

Obr. 5 Dynamika hlasování pro druhou dvojici úloh

Po vysvětlení řešení této úlohy přichází na řadu diskuze, pro které hodnoty k jde o zvětšení, pro které o shodnost a pro které jde o zmenšení.

Následuje *KoncepTest* pracující se špatnou představou: obraz je k-krát zvětšený/zmenšený vzor, a tedy i jeho obsah musí být k-krát zvětšen/zmenšen.

Obsah lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obsah 240 cm^2. Jaký obsah má jeho obraz $A'B'C'D'$ v podobnosti s koeficientem $k = 4$?

(A) 480 cm^2

(B) 960 cm^2

(C) 1920 cm^2

(D) 3840 cm^2

Řada správně uvažujících žáků svou odpověď zdůvodnila pomocí nepřesné kresby lichoběžníku, v němž bylo naskládaných 16 původních lichoběžníků a snad jen dva žáci dospěli ke správnému řešení přes úvahu vycházející z definice koeficientu podobnosti za dosazení do obecného vztahu pro obsah lichoběžníku, tj.

$$S' = 12(a' + b')v' = 12(4a + 4b)4v = 1612(a + b)v = 16S.$$

Poznamenejme, že žáci se při práci s podobností obvykle omezují pouze na hranici útvaru a řada z nich si myslí, že koeficient podobnosti udává, kolikrát se obraz vejde do vzoru. (U oblých útvarů tato představa naprosto ztroskotává.)

Žákovské porozumění významu koeficientu podobnosti můžeme prověřit i ve vyšší než druhé dimenzi a to pomocí dvojice následujících úloh.

Povrch krychle

Jaký je povrch obrazu krychle v podobnosti s $k = 2$ vzhledem k jejímu vzoru?

(A) dvakrát menší

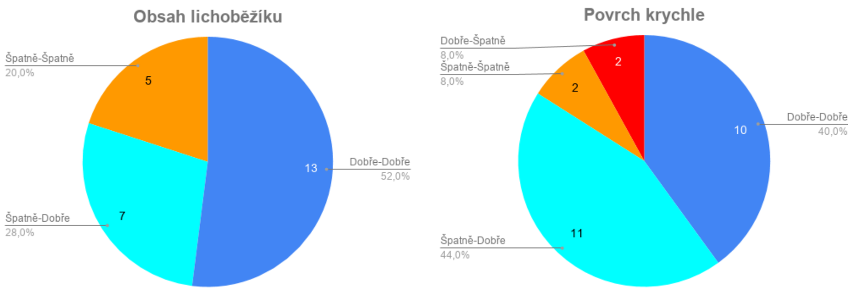
(B) čtyřikrát menší

(C) menší s jinou násobností

(D) dvakrát větší

(E) čtyřikrát větší

(F) větší s jinou násobností



(a) Podobnsot02 (b) Obvod lichoběžníku

Obr. 6 Dynamika hlasování pro třetí dvojici úloh

Objem krychle

Jaký je objem obrazu krychle v podobnosti s $k = \frac{1}{2}$ vzhledem k jejímu vzoru?

(A) dvakrát menší

(B) čtyřikrát menší

(C) menší s jinou násobností

(D) dvakrát větší

(E) čtyřikrát větší

(F) větší s jinou násobností

Pro zajímavost uveďme ještě úvodní úlohu do problematiky podobnosti trojúhelníků (věty o podobnosti trojúhelníků) a úvodní aplikační úlohu do problematiky podobnosti čtyřúhelníků (Kozderkovo pole).

Věty o podobnosti trojúhelníků

Rozhodni, které z tvrzení (A)–(C) není pravdivé. Případně zvol některou z možností (D)–(E).

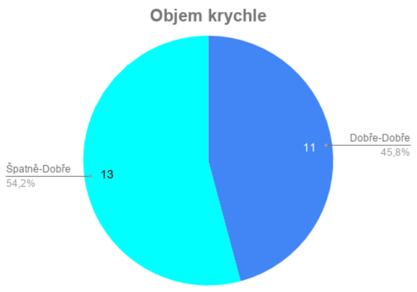
(A) Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li týž poměr délek dvou párů odpovídajících si stran.

(B) Dva trojúhelníky jsou podobné, rovnají-li se poměry délek každých dvou odpovídajících si stran.

(C) Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou vnitřních úhlech.

(D) Všechna tři tvrzení (A)–(C) jsou pravdivá, tvrzení (B) je však pouhým přepisem definice podobnosti geometrických útvarů pro trojúhelníky.

(E) Nepravdivé je více než jedno tvrzení (A)–(C).



(a) Podobnsot02

(b) Obvod lichoběžníku

Obr. 7 Dynamika hlasování pro čtvrtou dvojici úloh

Kozderkovo pole

Pan Kozderka se chystá prodat své pole čtyřúhelníkového tvaru. Do každého ze čtyř rohů proto zarazil kolík, mezi kolíky napnul provazy, a tímto způsobem zjistil, že:

(A) Mezi prvním a druhým kolíkem je 148 metrů.

(B) Mezi druhým a třetím kolíkem je 154 metrů.

(C) Mezi třetím a čtvrtým kolíkem je 115 metrů.

(D) Mezi čtvrtým a prvním kolíkem je 89 metrů.

Obr. 8 Dynamika hlasování pro Kozderkovo pole

(Poznamenejme, že kolíky pan Kozderka čísloval ve smyslu pořadí vrcholů čtyřúhelníku.)

Je možné na základě naměřených údajů určit s přesností na čtvereční metry výměru Kozderkova pole?

(A) Ano, pan Kozderka změřil vše potřebné.

(B) Ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem, nebo vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem.

(C) Ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem i vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem.

(D) Ne, pomocí popsaných vzdáleností (včetně (B) a (C)) pan Kozderka nikdy výměru pole zjistit nemůže.

K zamyšlení

Často se setkávám s názorem, že ačkoli metoda *PI* vypadá líbivě, jistě by nebylo snadné ji využít na základní či střední škole (dotazy účastníků konferencí). Tento názor je obvykle rámován odkazy na zjevnou časovou náročnost pro učitele a případnou neochotu, ba dokonce neschopnost, žáků dlouhodobě produkovat plodné skupinové diskuze nad zadanými *KoncepTesty*. Mé dosavadní zkušenosti v kostce prezentované v tomto článku ukazují, že *PI* je možné efektivně a smysluplně využít ve výuce školské matematiky.

Alespoň zpočátku je však nutné počítat se zvýšenou časovou náročností na přípravu. Není vždy snadné vymyslet opravdu dobré a zároveň vhodné *KoncepTesty*. Pevně však věřím, že časem se objeví dostatek nadšenců pro *PI*, následkem čehož bude existovat i dostatečně bohatá zásoba *KoncepTestů* připravených rovnou k použití. Rovněž připouštím, že pro žáky není vždy snadné zaujmout vůbec nějaký názor, vstoupit do diskuze a posléze svůj názor obhájit ostatním. Není ale právě naším úkolem pomoci jim růst? Tedy pomoci jim kriticky myslet, hloubat, argumentovat, přijímat i poskytovat zpětnou vazbu a diskutovat s ostatními? Není právě toto jedním ze smyslů výuky? Jak jinak mohou žáci tyto dovednosti získat a natrénovat, než praxí? Pro něco takového skýtá *PI* perfektní příležitost.

Rád bych však závěrem ještě jednou zdůraznil stěžejní význam principu anonymity a bezpečí. Při nevhodné volbě prostředku a formy hlasování vystavujme žáky zbytečnému diskomfortu a stresu. Ne každý dobře snáší vědomí, že ostatní žáci znají a hodnotí jeho názor, obzvláště není-li si „jistý v kramflecích“. Z tohoto důvodu upřednostněme hlasování skrze telefony, případně vhodně uzpůsobené (neprůhledné) hlasovací karty. Princip anonymity a bezpečí je však nutné zachovat i v rámci skupinových diskuzí. Nenuťme proto žáky formovat skupiny podle „jakkoli promyšleného klíče za účelem vyždímat z diskuze maximum“. Představme si situaci, že pochybujeme o své odpovědi na obtížnou otázku a jsme nuceni své stanovisko obhajovat spolužákovi, kterého se z jakéhokoli důvodu obáváme (například proto, že se nám posmívá). Doplňme proto *PI* pouze o zmíněné předdiskutování úloh ve dvojici se sousedem a do následného formování diskusních skupin nijak nezasahujme.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt č. 680119). Dále děkuji svým žákům, obzvláště pak členům reflexní skupiny, bez jejichž přímé účasti, názorů a komentářů by nebylo výsledků vhodných k publikaci.

Literatura

[1] *Lucas, A.*: Using peer instruction and i-clickers to enhance student participation in calculus. Primus, roč. 19 (2009), č. 3, s. 219–231.

[2] *Halloun, I. A., Hestenes, D.*: The initial knowledge state of college physics students. American journal of Physics, roč. 53 (1985), č. 11, s. 1043–1055.

[3] *Mazur, E.*: Peer instruction: a user's manual. Upper Saddle River, Prentice Hall, N.J., 1997.

[4] *Michimov, N., Morice, J., Ferrières, V.*: A step further in Peer Instruction: Using the Stepladder technique to improve learning. Computer and Education, roč. 91 (2015), s. 1–13.

[5] *Pilzer, S.*: Peer Instruction in Physics and Mathematics. Primus, roč. 11 (2001), č. 2, s. 185–192.

[6] *Vickerey, T. et al.*: Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review. Cell Biology Education, roč. 14 (2015), č. 1, es3–es3.

[7] *Yu-Fen Chen et. al.*: Elementary Science Classroom Learning with Wireless Response Devices – Implementing Active and Experiential Learning. In: IEEE International Workshop on Wireless and Mobile Technologies in Education (WMTE'05), 2005, s. 96–103.

[8] *Zadražil, T.*: KoncepTesty ve výuce matematiky. In: Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Srní, 2018.

[9] *Zadražil, T.*: Elektronické hlasování ve výuce matematiky. Užití počítačů ve výuce matematiky, Jihočeská Univerzita, České Budějovice, 2019.

[10] *Zadražil, T.*: Relationship between normalized learning gains of individuals and their typical role in group discussions with peers. In: 14th annual International Technology, Education and Development Conference (INTED2020), IATED, Valencie, 2020.