# Čtyři důkazy Heronova vzorce

*JIŘÍ BLAŽEK*

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Při výuce geometrie se žáci na středních škol setkávají s tzv. Heronovým vzorcem, který udává výpočet obsahu $S$ trojúhelníku $ABC$ pomocí délek jeho stran. Jeho znění je následující:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1}$$

kde $a$,$b$,$c$ jsou délky jeho stran a $2s = a + b + c$.

V tomto článku uvedeme čtyři způsoby, pomocí nichž lze Heronův[1)] vzorec odvodit.

Nejprve uvedeme poměrně známé algebraické odvození vzorce (1). Dále uvedeme tři geometrická odvození, přičemž první z nich je připisované právě Heronovi.

## 1. způsob odvození

Při obvyklém označení hlavních prvků v trojúhelníku $ABC$ platí pro jeho obsah

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Tento vztah upravíme do tvaru

$$4S^2 = a^2b^2\sin^2\gamma. \tag{2}$$

Z kosinové věty plyne

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \tag{3}$$

kde $\gamma$ je velikost úhlu, který svírají strany $a$ a $b$ trojúhelníka.

1) Hérón z Alexandrie (10–75) pracoval v Músaionu v Alexandrii, což byla jakási starověká analogie dnešní Akademie věd. V tehdejší době to byla nejprestižnější instituce svého druhu na světě. Dodnes není jasné, zda Hérón vzorec skutečně objevil nebo zda ho pouze převzal od Archiméda, který žil zhruba dvě století před ním [3].

Vztah (2) postupně upravíme užitím (3):

$$
\begin{aligned}
4S^2 &= a^2b^2\sin^2\gamma = a^2b^2(1-\cos^2\gamma) = \\
&= a^2b^2\left(1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right) = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).
\end{aligned}
$$

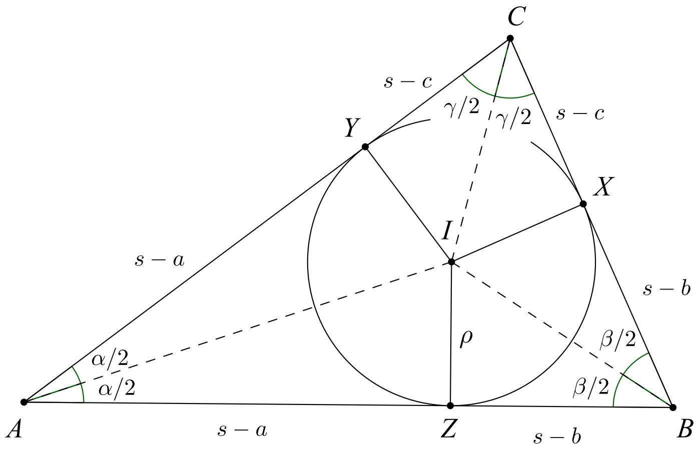
Tedy

$$S^2 = \frac{(a+b+c)}{2}\cdot\frac{(a+b-c)}{2}\cdot\frac{(a-b+c)}{2}\cdot\frac{(-a+b+c)}{2},$$

což po snadné úpravě dává vzorec (1).

## 2. způsob odvození (Heronův)

Uvažujme trojúhelník $ABC$. Nechť se jemu vepsaná kružnice se středem $I$ dotýká stran $AB$, $BC$, $CA$ po řadě v bodech $Z$, $X$, $Y$ (obr. 1). Platí $|AZ| = |AY| = s-a$, $|BZ| = |BX| = s-b$, $|CX| = |CY| = s-c$.

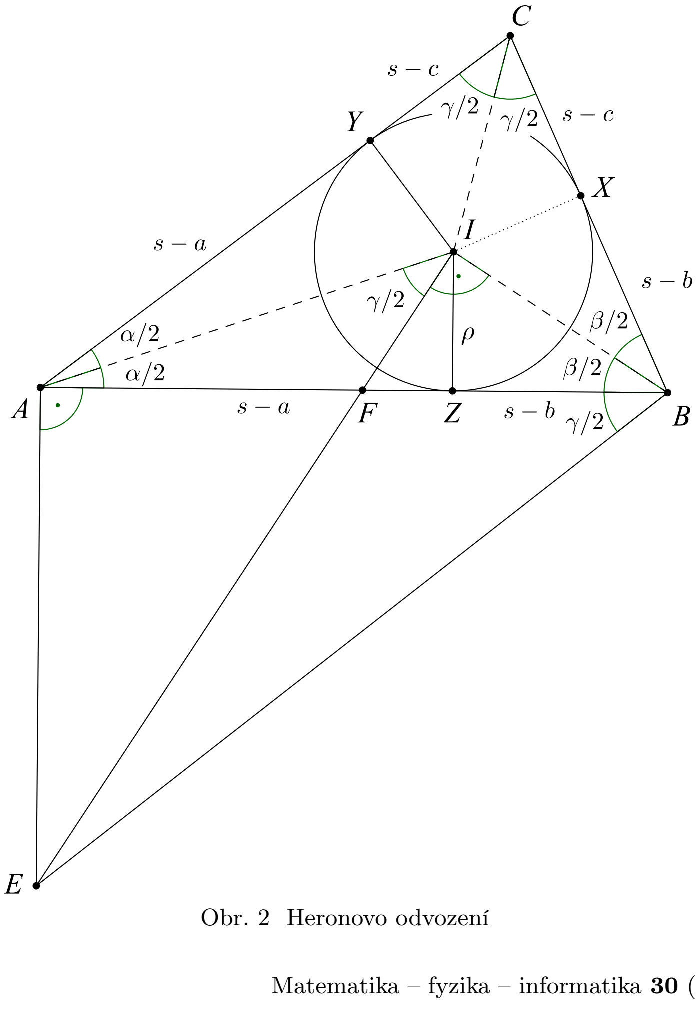



Obr. 1 Kružnice vepsaná a délky úseček

Klíčovou fází důkazu je vyjádření poloměru $\rho$ kružnice vepsané trojúhelníku $ABC$ pomocí délek jeho stran. Platí

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)\rho = s\rho.$$

Za tímto účelem sestrojíme dvě kolmice: přímku kolmou k úsečce $AB$ v bodě $A$ a přímku kolmou k úsečce $IB$ v bodě $I$. Tyto kolmice se protnou v bodě $E$. Dále označme $F$ průsečík přímky $IE$ s přímkou $AB$ (obr. 2).




Obr. 2 Heronovo odvození

Platí

$$|\sphericalangle AIB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

z čehož plyne, že $|\sphericalangle AIE| = \frac{\gamma}{2}$. Čtyřúhelník $EAIB$ je tětivový, neboť body $A$ a $I$ leží na Thaletově kružnici s průměrem $EB$ (kružnice opsaná čtyřúhelníku na obrázku v zájmu přehlednosti chybí). Podle věty o obvodových úhlech je $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle AIE| = \frac{\gamma}{2}$. Důsledkem této skutečnosti je podobnost trojúhelníků $AEB$ a $YIC$ (věta *uu*). Platí tedy

$$|AE| : |AB| = |YI| : |YC|,$$

či jinak zapsáno

$$\frac{|AE|}{c} = \frac{\rho}{s - c}.$$

Pokud jsou si dva zlomky rovny, pak zlomek vytvořený podílem součtu jejich čitatelů a součtu jejich jmenovatelů je jim též roven, proto

$$\frac{\rho}{s - c} = \frac{|AE| + \rho}{s} \tag{4}$$

Dále, v souladu s označením na obr. 2 platí

$$\frac{|FZ|}{s - a} = \frac{|FZ|}{|AZ|} = \frac{|FI|}{|EI|} = \frac{|IZ|}{|AE| + |IZ|} = \frac{\rho}{|AE| + \rho}. \tag{5}$$

Vynásobením levých a pravých stran rovností (4) a (5) obdržíme

$$\frac{\rho}{s - c} \cdot \frac{|FZ|}{s - a} = \frac{\rho}{s}.$$

Odtud

$$|FZ| = \frac{(s - a)(s - c)}{s}. \tag{6}$$

Podle Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku $FBI$ platí

$$\rho^2 = |IZ|^2 = |FZ| \cdot |ZB| = |FZ| \cdot (s - b),$$

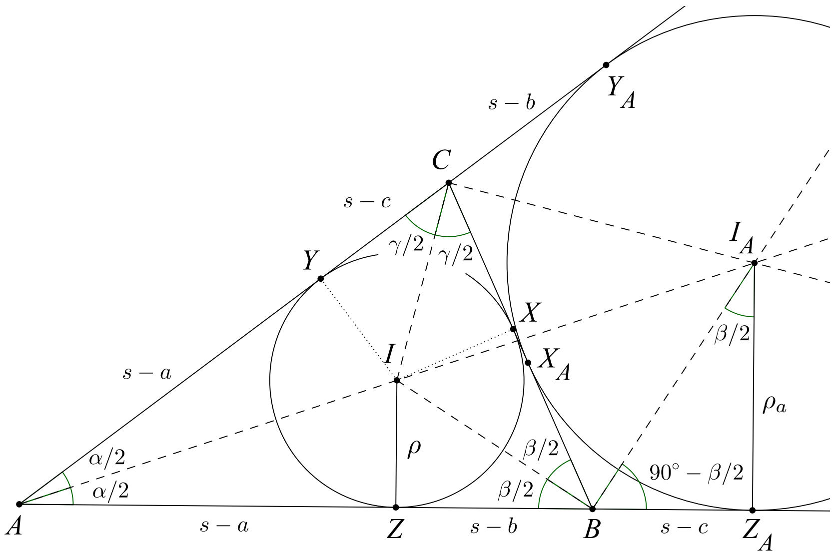
což po dosazení za $|FZ|$ ze vztahu (6) dává po úpravě

$$\rho^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}. \tag{7}$$

Následným využitím vzorce $S = \rho s$ obdržíme vztah (1).

## 3. způsob odvození

V tomto odvození budeme, kromě kružnice vepsané s jejími dotykovými body $X$, $Y$, $Z$, uvažovat i kružnici připsanou, například straně $a$ trojúhelníku. Její střed nechť je $I_A$, dotykové body s přímkami $AB$, $AC$ označme po řadě $Z_A$, $Y_A$ a dotykový bod se stranou $BC$označme $X_A$ (obr. 3).




Obr. 3 Třetí odvození Heronova vzorce

Nejdříve uvedeme jeden známý fakt a jedno pozorování. Je známo, že $|AZ_A| = s$ a tedy $|BZ_A| = |AZ_A| - |AB| = s - c$. Dále, trojúhelníky $IZB$ a $BZ_AI_A$ jsou podobné (podle věty $uu$), neboť jsou oba pravoúhlé a $|\sphericalangle IBZ| = \frac{\beta}{2}$, $|\sphericalangle I_ABZ_A| = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu. Z podobnosti trojúhelníků $AIZ$ a $AI_AZ_A$ plyne

$$\frac{\rho}{s-a} = \frac{|IZ|}{|AZ|} = \frac{|I_AZ_A|}{|AZ_A|} = \frac{\rho_a}{s}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\rho}{\rho_a} = \frac{s-a}{s}, \tag{8}$$

kde $\rho_a$ je poloměr kružnice připsané straně $a$.

Z podobnosti trojúhelníků $BIZ$ a $I_ABZ_A$ plyne

$$\frac{\rho}{s-b} = \frac{|IZ|}{|ZB|} = \frac{|BZ_A|}{|Z_AI_A|} = \frac{s-c}{\rho_A}.$$

Obdržíme

$$\rho\,\rho_a = (s-b)(s-c). \tag{9}$$

Vynásobením rovnic (8) a (9) dostaneme

$$\rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s},$$

což stejně jako v předešlém případu vede na Heronův vzorec.

## 4. způsob odvození

Tentokrát budeme uvažovat všechny tři kružnice připsané stranám trojúhelníku $ABC$. Značení bodů z předchozího důkazu konzistentně rozšíříme ve shodě s obr. 4.

Nejprve dokážeme identitu

$$|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|. \tag{10}$$

Jelikož $CI$ a $CI_A$ jsou osy vedlejších úhlů, svírají pravý úhel. K analogickému poznatku dospějeme v případě os $BI$ a $BI_A$. Čtyřúhelník $BI_ACI$ je tedy tětivový a $I_AI$ je průměr kružnice $k$ jemu opsané. Nyní uvažme osově souměrný obraz $C'$ bodu $C$ podle osy $I_AI$ (na obr. 4 zakreslen není). Tento bod leží na kružnici $k$ opsané čtyřúhelníku a navíc leží na přímce $AB$. Pokud $|AC| \neq |AB|$, pak $C' \neq B$ a mocnost $m(A)$ bodu $A$ ke kružnici $k$ je rovna

$$m(A) = |AI| \cdot |AI_A| = |AC'| \cdot |AB| = |AC| \cdot |AB|.$$

V případě $|AC| = |AB|$ není obtížné dokázat, že kružnice $k$ se dotýká stran $AB$ a $AC$ a vztah (10) zůstává v platnosti.

Z obr. 4 plyne dále identita

$$|AC| \cdot |AB| = |AI_C| \cdot |AI_B|. \tag{11}$$

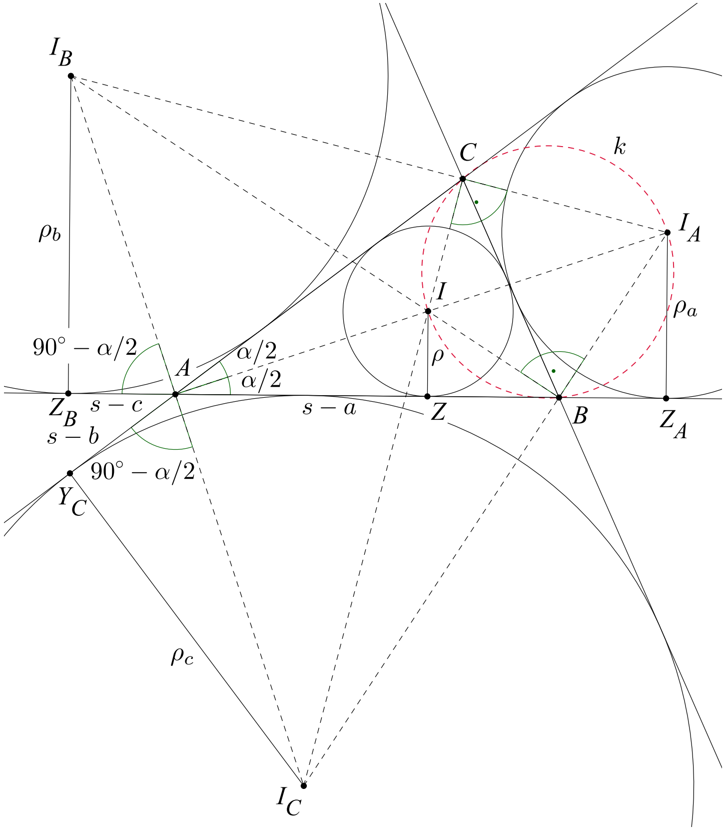
(Dokážeme ji detailně v úloze 1 na str. 25.)

Heronův vzorec pak získáme postupnou úpravou vztahu

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin\alpha. \tag{12}$$

Jelikož $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, přepíšeme (12) do tvaru

$$S = |AC| \cdot |AB| \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$




Obr. 4 Čtvrté odvození Heronova vzorce

S přihlédnutím ke vztahům (10) a (11) výše uvedený vztah upravíme:

$$S = \sqrt{|AC| \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{|AI| \cdot |AI_A| \cdot |AI_C| \cdot |AI_B| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{|AI| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_A| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_C| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_B| \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

*Poznámka.* Poslední rovnost vyplývá z následujících identit, viz obr. 4:

$$|AI|\cos\frac{\alpha}{2} = |AZ| = s - a, \qquad |AI_A|\cos\frac{\alpha}{2} = |AZ_A| = s,$$

$$|AI_C|\sin\frac{\alpha}{2} = |AI_C|\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = |AY_C| = |CY_C| - |AC| = s - b,$$

$$|AI_B|\sin\frac{\alpha}{2} = |AI_B|\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = |AZ_B| = |BZ_B| - |AB| = s - c.$$

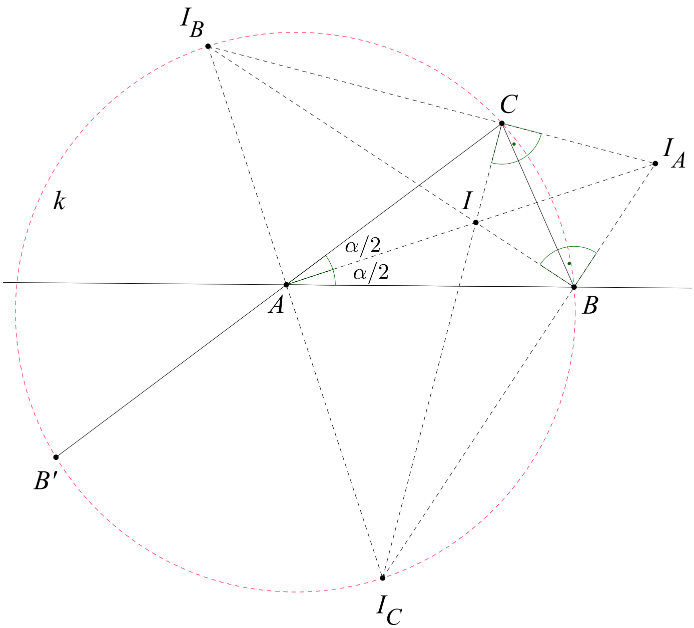
**Úloha 1**

Dokažte identitu (11) (obr. 4).

*Řešení.* Čtyřúhelník $I_BCBI_C$ je tětivový (obr. 5), průměrem kružnice $k$ jemu opsané je úsečka $I_BI_C$. Uvažme osově souměrný obraz $B'$ bodu $B$ podle přímky $I_BI_C$. Protože přímka $I_BI_C$ je vnější osou úhlu $CAB$, leží tento bod na kružnici $k$ a také leží na přímce $AC$. Identita

$$|AI_C| \cdot |AI_B| = |AB'| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AC|$$

vyplývá z různých vyjádření mocnosti bodu $A$ ke kružnici $k$.




Obr. 5  Řešení úlohy 1

### Úloha 2

Dokažte platnost vztahu

$$S = \sqrt{\rho\,\rho_a\,\rho_b\,\rho_c},$$

kde $\rho_a$, $\rho_b$, $\rho_c$ jsou poloměry kružnic připsaných stranám $a$, $b$, $c$ trojúhelníku $ABC$ atd.

*Řešení.* Vyjdeme ze vzorce, který jsme použili při čtvrtém odvození Heronova vzorce a upravíme ho následovně:

$$S = \sqrt{|AI| \cdot |AI_A| \cdot |AI_B| \cdot |AI_C| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sqrt{|AI| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_A| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_B| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_C| \cos \frac{\alpha}{2}},$$

přičemž (viz obr. 4):

$$|AI| \sin \frac{\alpha}{2} = \rho,$$

$$|AI_A| \sin \frac{\alpha}{2} = \rho_a,$$

$$|AI_B| \cos \frac{\alpha}{2} = \rho_b,$$

$$|AI_C| \cos \frac{\alpha}{2} = \rho_c.$$

## Literatura


[1] *Švrček, J. Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. Polytechnická knižnice, SNTL, Praha, 1988.

[2] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2008.

[3] *Dunham W.*: Journey through Genius. Penguin Books, 1991.