Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 267 a 268 můžete zaslat nejpozději do 30. 6. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*.

Úloha 267

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|BC| = a$ a $|AC| = b$, $a < b$, protnou osy jeho vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C přímku AB po řadě v bodech E a F. Určete obsah trojúhelníku EFC.

Jaroslav Zhouf

Úloha 268

V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$px + 2y = 2,$$
$$x + (p^2 - 3)y = p - 1$$

s reálným parametrem p.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 263 a 264, jejichž zadání jsme zveřejnili ve 3. čísle loňského (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 263

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí

$$f(d_1) + f(d_2) + \ldots + f(d_n) = m.$$

Pavel Calábek

Řešení. Číslo 1 má jediného dělitele 1. Platí tak $f(1) = 1$. Nechť p je libovolné prvočíslo, to má právě dva dělitele 1 a p, podle zadání platí

$$p = f(1) + f(p) = 1 + f(p),$$

proto $f(p) = p - 1$. Pro číslo p^2 se třemi děliteli 1, p a p^2 platí

$$p^2 = f(1) + f(p) + f(p^2) = 1 + (p - 1) + f(p^2).$$

Odtud $f(p^2) = p^2 - p$. Nechť p a q jsou různá prvočísla. Číslo pq má čtyři dělitele 1, p, q a pq. Podle zadání máme

$$pq = f(1) + f(p) + f(q) + f(pq) = 1 + (p-1) + (q-1) + f(pq),$$

odtud $f(pq) = (p-1)(q-1)$.

Nechť přirozené číslo m má následující rozklad na součin prvočísel

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}.$$

Užitím principu matematické indukce vzhledem k součtu $n = k_1 + k_2 + \dots + k_s$ (který nazveme *výškou* m) dokážeme, že pro všechna přirozená čísla s výškou $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(m) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}). \tag{1}$$

Pro $n = 0, 1, 2$ to bylo dokázáno v předešlém odstavci. Předpokládejme, že tvrzení platí pro přirozená čísla s výškou nejvýše $n \geq 2$, dokážeme že platí i pro přirozená čísla s výškou $n+1$. Nechť p je některé prvočíslo, které dělí číslo m s výškou $n+1$. Rozlišíme dva případy.

(i) Nechť $m = p^{n+1}$. Potom dle zadání platí

$$\begin{aligned} p^{n+1} = 1 + f(p) + \dots + f(p^n) + f(p^{n+1}) = \\ = 1 + (p-1) + \dots + (p^n - p^{n-1}) + f(p^{n+1}). \end{aligned}$$

Odtud $f(p^{m+1}) = p^{m+1} - p^m$, což v tomto případě dokazuje (1).

(ii) Nechť k $(1 \leq k \leq n)$ je nejvyšší mocnina prvočísla p, která dělí m a platí

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} p^k = a \cdot p^k,$$

kde $1 \leq k \leq n$ a výška čísla m je $n+1$. Všechny dělitele čísla m můžeme rozdělit na dvě diskunktní skupiny. V první jsou všichni dělitelé čísla $m/p = a \cdot p^{k-1}$ výšky n, ve druhé jsou dělitelé čísla m, kteří jsou násobkem p^k. Když pro každé číslo z první skupiny uvažujeme jeho funkční hodnotu funkce f, pak součet těchto funkčních hodnot je dle zadání $a \cdot p^{k-1}$. Označíme-li $d_1, \dots, d_r = a$ všechny dělitele čísla a, potom ve druhé skupině jsou čísla tvaru $d_i \cdot p^k$, kde $1 \leq i \leq r$. Pro $i < r$ mají tato čísla výšku nejvýše n. Podle indukčního předpokladu platí $f(d_i \cdot p^k) = f(d_i)(p^k - p^{k-1})$, součet funkčních hodnot čísel ze druhé skupiny tak podle zadání je

$$(p^k - p^{k-1})\big(f(d_1) + \dots + f(d_{r-1})\big) + f(a \cdot p^k) = (p^k - p^{k-1})\big(a - f(a)\big) + f(a \cdot p^k).$$

Spojením obou předchozích výsledků zjistíme, že součet funkčních hodnot všech dělitelů čísla m je

$$a\cdot p^{k-1}+(p^k-p^{k-1})\big(a-f(a)\big)+f(a\cdot p^k) = a\cdot p^k-f(a)(p^k-p^{k-1})+f(a\cdot p^k).$$

Podle zadání je ovšem tento součet roven $a \cdot p^k$, odtud již dostaneme

$$f(a \cdot p^k) = f(a)(p^k - p^{k-1}),$$

což dokazuje (1) i ve druhém případě.

Užitím principu matematické indukce tak (1) platí pro všechna přirozená čísla m.

Poznámka. Funkce f, kterou jsme našli je jediná, a je to tzv. Eulerova funkce φ.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Adam Mendl* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslal *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Úloha 264

Tři bohatýři bojují s drakem Gorynyčem. Ilja Muromec každým svým úderem meče setne drakovi polovinu jeho hlav a k tomu ještě jednu. Dobryňa Nikitič každým svým úderem odetne drakovi třetinu jeho hlav a k tomu ještě dvě. Aljoša Popovič utne každým svým úderem drakovi čtvrtinu jeho hlav a k tomu ještě tři. Bohatýři bojují s drakem v pořadí, které si sami zvolí. Pokud žádný z bohatýrů nemůže utít drakovi hlavy (neboť počet hlav by nebyl celočíselný), Gorynyč tři bohatýry sežere. Rozhodněte, zda bohatýři mohou stít všechny hlavy draku Goryničovi, který má 29! hlav.

převzato ze soutěže Turnaj měst, jaro 2020

Řešení. Nechť k je přirozené číslo. Pokud má drak $2k$ hlav a zaútočí na něj Ilja Muromec, zbude mu $k-1$ hlav. Pokud má Gorynyč $3k$ hlav, potom mu jich po útoku Dobryni Nikitiče zbude $2k-2 = 2(k-1)$, konečně pokud má drak $4k$ hlav, zbude mu po útoku Aljoši Popoviče $3k - 3 = 3(k - 1)$ hlav. Protože $k-1$ je celé nezáporné číslo, plyne odtud, že po útoku libovolného bohatýra na draka s kladným počtem hlav mu jich zbude celý nezáporný počet.

Číslo 29! je sudé. Ukážeme, že pokud bohatýři začnou útočit na draka se sudým počtem hlav, po několika (jednom nebo dvěma) vhodně zvolených úderech bude mít Gorynyč počet hlav, který je opět dělitelný dvěma. Bohatýři budou své útoky volit následujícím způsobem:

- Pokud je počet hlav dělitelný 4, tedy je roven $4k$ pro vhodné přirozené číslo k, zaútočí Aljoša Popovič. Po jeho zásahu bude mít drak $3k-3$ hlav. Jestliže je toto číslo liché (a tedy $k \geq 2$), zaútočí dále Dobryňa Nikitič, drak pak bude mít $2k-4 = 2(k-2)$ hlav, tedy počet dělitelný dvěma.
- Pokud je počet Gorynyčových hlav sudý ale není dělitelný čtyřmi, tedy $4k+2$ pro vhodné celé nezáporné celé číslo k, napadne jej Ilja Muromec, po jeho zásahu bude mít drak $2k$ hlav.

Protože po každém útoku se počet Gorynyčových hlav zmenší, opakováním těchto tahů mu bohatýři nakonec všechny hlavy setnou.

Jiné řešení. Pokud má drak 0 hlav, bohatýři vyhráli. Pokud má 1 nebo 5 hlav, tak žádný bohatýr nemůže zaútočit a budou všichni sežráni. Konečně, pokud má Gorynyč 2, 3 nebo 4 hlavy, potom je mohou bohatýři jedním úderem vedeným po řadě Iljou Muromcen, Dobryňou Nikitičem nebo Aljošou Popovičem všechny stít.

Užitím principu matematické indukce ukážeme, že pokud má drak počet hlav z množiny $A_k = \{6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4\}$ pro celé nezáporné číslo k, potom bohatýři mohou drakovi nějakou posloupností úderů stít všechny hlavy. Pro $k = 0$ to bylo dokázáno v předcházejícím odstavci.

Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro všechna celá nezáporná čísla menší než k a počet Gorynyčových hlav je z množiny A_k. Ukážeme, že některý z bohatýrů nyní může drakovi stít hlavy tak, že počet jeho hlav bude z některé množiny A_l pro $0 \leq l < k$ a bohatýři tak mají posloupnost seků, která vede k zabití draka.

- Pokud má drak $6k$ hlav, potom po úderu Dobryni Nikitiče jich bude mít $4k-2 \geq 2$. Jelikož je to číslo sudé a menší než $6k$, patří do nějaké množiny A_l pro $l < k$.
- Pokud má Gorynyč $6k+3$ hlav, bude jich mít po úderu Dobryni Nikitiče $4k \geq 4$, což je číslo sudé a menší než $6k$, proto opět patří do nějaké množiny A_l pro $l < k$.
- Nechť má drak $6k+2$ hlav, potom jich po tětí Ilji Muronce bude mít $3k$, protože $3 \leq 3k < 6k$ a jedná se o číslo dělitelné 3, patří opět do některé z množin A_l.
- Konečně, nechť má Gorynyč $6k+4$ hlav.
  - Pokud je číslo $3k+1$ sudé (tedy k liché), udeří Ilja Muromec, po jeho seku bude mít drak $3k+1$ hlav, stejně jako v přechozím lehce nahlédneme, že toto sudé číslo patří do některé z množin A_l.

- V opačném případě udeří Aljoša Popovič, potom bude mít Gorynyč $\frac{9}{2}k$ hlav, což je číslo dělitelné třemi, tedy patřící do vhodné množiny A_l.

Užitím principu matematické indukce tak tvrzení platí pro všechna nezáporná celá čísla k. Protože číslo 29! je (nejmenším) prvkem množiny $A_{29!/6}$, mají bohatýři posloupnost úderů, kterými setnou Gorynyčovi všechny hlavy.

Poznámka. Zvolené posloupnosti tahů v obou řešeních jsou jednoznačné a určují nám pořadí, ve kterém jistě bohatýři Gorynyčovi utnou všechny hlavy. Ovšem nemusí to být jediné (natož nejkratší) posloupnosti úderů, kterými lze drakovi všechny hlavy stít. Označme bohatýry I, D, A podle prvního písmene jejich jména. Vypišme posloupnosti, jak lze drakovi se 20 hlavami všechny utnout. Použijme zápis, kde např. $I4$ znamená, že drakovi po zásahu Ilji zbudou 4 hlavy. Algoritmus z prvního řešení dá následující posloupnost 4 zásahů

$$A12\,A6\,I2\,I0,$$

algoritmus ze druhého posloupnost 3 útoků

$$I9\,N4\,A0.$$

Draka lze ovšem zabít i následujícími posloupnostmi 4 zásahů

$$A12\,A6\,N2\,I0, \quad A12\,N6\,I2\,I0, \quad A12\,N6\,N2\,I0.$$

Užitím počítače zjistíme, že podle prvního algoritmu bohatýři Gorynyče zabijí po 175 útocích (Ilja 36, Dobryňa 43, Aljoša 96), podle druhého algoritmu po 136 úderech (Ilja 64, Dobryňa 36, Aljoša 36). Přitom nejkratší posloupnost vedoucí k zabití draka se skládá ze 116 a nejdelší ze 192 úderů.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Amálie Dostalíková*, *Vendula Onderková* obě z GJŠ v Přerově a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská 45.

Nedopatřením se nám do seznamu správných řešitelů úlohy 262 v minulém čísle nedostal *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, za což se mu omlouváme a dodatečně jej do seznamu zařazujeme.

Pavel Calábek