MATEMATIKA

O exponenciálních diofantovských rovnicích

TOMÁŠ RIEMEL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Exponenciálními diofantovskými rovnicemi rozumíme takové rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají charakter exponentů daných exponenciálních funkcí se základy, jimiž jsou přirozená čísla větší než 1. V tomto článku, který navazuje na [4], se zaměříme na některé typy exponenciálních diofantovských rovnic o dvou neznámých ve tvaru

$$a^x - b^y = c, \tag{1}$$

kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel, a, b jsou daná přirozená čísla větší než 1 a c je dané celé číslo ($c \neq 0$).

Pro $c = 1$ vyslovil již v roce 1844 belgický matematik *Eugene Charles Catalan* zajímavou hypotézu, kterou dokázal až v roce 2002 rumunský matematik *Preda Mihăilescu.*

Věta 1 (Catalanova)
Diofantovská rovnice ve tvaru

$$a^x - b^y = 1,$$

kde a, b, x, y jsou hledaná přirozená čísla větší než 1, má právě jedno řešení, a to $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$.

Problematikou těchto rovnic a rovnic jim podobných se zabývalo mnoho dalších matematiků, zejména *S. S. Pillai*[1)] a *M. A. Bennett*[2)]. Nejdůležitějším výsledkem je následující věta publikovaná v [1] a zmíněná např. v [5] a [7].

Věta 2

Nechť a, b jsou daná přirozená čísla větší než 1, pak diofantovská rovnice (1), kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel a c je dané celé nenulové číslo, má nejvýše dvě řešení.

Speciálně pak pro $a = b + 1$ platí následující věta.

Věta 3 (M. A. Bennett, 2003, viz [2])

Nechť b, c jsou daná přirozená čísla, $b \geq 2$, pak diofantovská rovnice

$$|(b+1)^x - b^y| = c, \tag{2}$$

má v oboru přirozených čísel nejvýše jedno řešení s výjimkou

$$(b, c) \in \{(2,1),(2,5),(2,7),(2,13),(2,23),(3,13)\}.$$

V prvních dvou případech má rovnice (2) právě 3 řešení, v posledních čtyřech případech má právě 2 řešení. Důkaz této věty je možno nalézt v [2].

Dále v příspěvku uvedeme *elementární metody* řešení některých speciálních exponenciálních diofantovských rovnic ve tvaru $3^x - 2^y = c$, resp. $2^y - 3^x = c$, kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel a c je dané přirozené číslo. Tyto rovnice lze zapsat souhrnně ve tvaru (2) pro $b = 2$, tj.

$$|3^x - 2^y| = c.$$

Při řešení této a následujících úloh se využívá především metody faktorizace (součinového tvaru rovnice) a číselných kongruencí.

Příklad 1

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 1.$$

---

1) *Subbayya Sivasankaranarayana Pillai* (1901–1950) indický matematik, zaměřující se na teorii čísel. Jeho příspěvek k Waringovu problému popsal v roce 1950 K. S. Chandrasekharan jako téměř jistě jeho nejlepší dílo a jeden z nejlepších úspěchů v indické matematice od doby Ramanujana.

2) *Michael A. Bennett* (1965–dosud), kanadský matematik zabývající se diofantovskými aproximacemi a teorií čísel

Řešení. Danou rovnici přepíšeme do tvaru

$$3^x - 1 = 2^y. \tag{3}$$

Pro $x = 1$ dostáváme $y = 1$. Je-li $x \geq 2$, pak $y \geq 3$. Levou stranu rovnice (3) dále upravíme podle známého vzorce

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

pro libovolná reálná čísla A, B (zde $A = 3$, $B = 1$) a libovolné přirozené číslo n.

$$(3 - 1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1) = 2^y,$$

tj.

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3^2 + 3 + 1 = 2^{y-1}. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že výraz na pravé straně (4) je dělitelný dvěma, musí být dělitelná dvěma i levá strana. To nastane, pokud je na levé straně (4) sudý počet sčítanců. Nutně platí $x = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Rovnici (3) lze pak upravit do tvaru

$$3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1) = 2^y.$$

Zřejmě $3^k + 1 = 2^m$ a $3^k - 1 = 2^n$, kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m > n$, $m+n = y$. Zároveň ale platí $(3^k+1)-(3^k-1) = 2$. Takže $3^k+1 = 4$ a $3^k-1 = 2$, tj. $k = 1$, neboli $x = 2$ a z rovnice (3) získáme $y = 3$. Zkouškou (je zde součástí řešení) se přesvědčíme o správnosti získaného řešení.

Závěr. Daná rovnice, jejíž řešení jsme hledali v oboru přirozených čísel, má právě dvě řešení, tj. $(x, y) \in \{(1, 1), (2, 3)\}$. Nalezený výsledek je tedy ve shodě s větou 2.

Podobně lze řešit také následující úlohu.

Příklad 2

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 1.$$

Řešení. Nejprve danou rovnici upravíme do tvaru

$$3^x = 2^y - 1. \tag{5}$$

Pro $y = 1$ nemá daná úloha řešení v oboru přirozených čísel. Jestliže $y \geq 2$, pak $x \geq 1$.

Po úpravě pravé strany rovnice (5) dostaneme

$$3^x = 2^{y-1} + 2^{y-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1.$$

Tedy $3 \mid (2^{y-1}+2^{y-2}+\ldots+2^2+2+1)$, z čehož (podobně jako v příkladu 1) nutně $y = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. S ohledem na tuto podmínku přepíšeme rovnici (5) do tvaru

$$3^x = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1).$$

Dále postupujeme analogicky jako v příkladu 1. Čísla $2^k + 1$ a $2^k - 1$ jsou tedy mocninami čísla 3 a zároveň je jejich rozdíl roven 2. Platí tudíž $2^k + 1 = 3$ a $2^k - 1 = 1$. Zkouškou se opět přesvědčíme, že nalezená dvojice $(1, 2)$ je řešením úlohy.

Závěr. Daná rovnice má právě jedno řešení v oboru přirozených čísel, a to ve tvaru $(x, y) = (1, 2)$.

První dva příklady lze souhrnně považovat za rovnici

$$|3^x - 2^y| = 1,$$

pro niž jsme v oboru přirozených čísel nalezli právě 3 řešení dané rovnice, a to $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, což je ve shodě s tvrzením věty 3.

Následující příklad názorně ukazuje, že zkoumané exponenciální diofantovské rovnice tvaru (2) nemají řešení v oboru přirozených čísel při volbě některých hodnot celého čísla c na její pravé straně.

Příklad 3

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 2. \tag{6}$$

Řešení. Danou rovnici upravíme nejprve do tvaru $3^x = 2^y + 2$. Jelikož $y \geq 1$, lze rovnici přepsat do tvaru

$$3^x = 2(2^{y-1} + 1),$$

avšak $2 \nmid 3^x$ pro každé přirozené x, což znamená, že rovnice (6) nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Poznámka. Výsledek příkladu 3 můžeme zobecnit, zvolíme-li v rovnici $|3^x - 2^y| = c$ číslo $c = 2k$, kde k je dané přirozené číslo. Analogicky lze postupovat i pro $c = 3k$. Ve všech těchto případech nemá daná rovnice řešení v oboru přirozených čísel.

Dále se budeme zabývat diofantovskými rovnicemi $3^x - 2^y = 5$ a $2^y - 3^x = 5$, tj. rovnicí $|3^x - 2^y| = 5$. Podrobné řešení diofantovské rovnice $3^x - 2^y = 5$ je možno nalézt v [4, příklad 7]. Tato úloha má právě jedno řešení $(x, y) = (2, 2)$ v oboru přirozených čísel.

Zabývejme se nyní rovnicí $2^y - 3^x = 5$. Při jejím řešení a také při řešení následujících dvou úloh využijeme metodu číselných kongruencí.

Příklad 4

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 5.$$

Řešení. Danou rovnici nejprve převedeme do tvaru

$$3^x = 2^y - 5. \tag{7}$$

Výraz 3^x na levé straně (7) nabývá kladných hodnot, tudíž $2^y - 5 > 0$, a tedy $y \geq 3$. Nyní upravíme rovnici (7) do tvaru

$$3^x - 3 = 2^y - 8. \tag{8}$$

Protože $y \geq 3$, platí

$$3^x - 3 = 2^3 \left(2^{y-3} - 1\right).$$

Je tedy $2^3 \mid (3^x - 3)$, tj. $2^3 \mid 3(3^{x-1} - 1)$. Jelikož $2^3 \nmid 3$, je $2^3 \mid (3^{x-1} - 1)$. Je-li $x = 1$, z rovnice (8) získáme řešení $(x, y) = (1, 3)$. V případech, kdy $x \geq 2$ a tedy $y \geq 4$, dostáváme v rovnici (8) na obou stranách přirozené číslo. Nechť $2^3 = 3^{x-1} - 1$, tedy $x = 3$. Z rovnice (7) získáme $y = 5$. Dostali jsme tak další řešení ve tvaru $(x, y) = (3, 5)$. Konečně, jestliže $x \geq 4$, pak rovnici (7) upravíme do tvaru

$$3^x - 81 = 2^y - 86. \tag{9}$$

Dále rovnici (9) upravíme

$$81 \left(3^{x-4} - 1\right) = 2^y - 86.$$

Tedy $81 \mid (2^y - 86) = 2(2^{y-1} - 43)$. Jelikož $81 \nmid 2$, je $81 \mid (2^{y-1} - 43)$. Nejmenší mocnina čísla 2, která vyhovuje poslední podmínce o dělitelnosti číslem 81, je $y-1=22$. Dále pak vyhovují čísla 76, 130, 184 atd. Platí tedy $y=23+54k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Zároveň lze rovnici (9) upravit do tvaru

$$3^x - 81 = 2\left(2^{y-1} - 43\right).$$

Číslo 2 dělí $3^x - 81 = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $2 \nmid 81$, platí $2 \mid (3^{x-4} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Dále pak 2, 4, 6 atd. Pak tedy $x = 4 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici

$$2^y - 3^x = 5$$

přepíšeme do tvaru

$$2^{23+54k} - 3^{4+2l} = 2^{23} \cdot 2^{54k} - 81 \cdot 3^{2l} = 2^{23} \cdot (2^{54})^k - 81 \cdot 9^l = 5. \tag{10}$$

Z kongruencí

$$\begin{aligned} 2^{23} &\equiv 3 \pmod 5, \\ 2^{54} &\equiv -1 \pmod 5, \\ 81 &\equiv 1 \pmod 5, \\ 9 &\equiv -1 \pmod 5 \end{aligned}$$

a jejich využitím v (10) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$3 \cdot (-1)^k \equiv 1 \cdot (-1)^l \pmod 5. \tag{11}$$

Jelikož pro všechna celá nezáporná čísla n platí, že $(-1)^n$ nabývá pouze hodnot 1 a -1, nemá kongruenční rovnice (11), a tedy ani rovnice (10) v oboru přirozených čísel, řešení. Daná úloha má v oboru přirozených čísel právě 2 řešení, což je v souladu s větou 2.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení v oboru přirozených čísel, a to $(x, y) \in \{(1, 3), (3, 5)\}$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 5$ má tedy v oboru přirozených čísel celkem tři řešení $(x, y) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 5)\}$, což je opět v souladu s větou 3.

Příklad 5

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 7.$$

Řešení. Ze zadání je patrné, že $x \geq 2$, a tedy $y \geq 1$. Danou rovnici upravíme do tvaru

$$3^x - 9 = 2^y - 2. \tag{12}$$

Pokud $x = 2$, pak snadno získáme řešení, kterým je dvojice $(x, y) = (2, 1)$.

V případech, kdy $x \geq 3$, lze rovnici (12) přepsat do tvaru

$$3^x - 27 = 2^y - 20. \tag{13}$$

Z rovnice (13) plyne, že $y \geq 5$. Dále tuto rovnici upravíme do tvaru

$$27\left(3^{x-3} - 1\right) = 2^y - 20.$$

Tedy $27 \mid (2^y - 20) = 4(2^{y-2} - 5)$. Jelikož $27 \nmid 4$, pak $27 \mid (2^{y-2} - 5)$. Nejmenší mocnina čísla 2 vyhovující této podmínce je $y - 2 = 5$. Dále pak 23, 41, 59 atd. Proto $y = 7 + 18k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici (13) lze upravit do tvaru

$$3^x - 27 = 4\left(2^{y-2} - 5\right).$$

Číslo 4 dělí $3^x - 27 = 27(3^{x-3} - 1)$. Protože $4 \nmid 27$, je $4 \mid (3^{x-3} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je zde $x - 3 = 0$. Dále pak 2, 4, 6 atd. Odtud $x = 3 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici

$$3^x - 2^y = 7$$

lze nyní přepsat do tvaru

$$3^{3+2l} - 2^{7+18k} = 27 \cdot 3^{2l} - 128 \cdot 2^{18k} = 27 \cdot 9^l - 128 \cdot 262\,144^k = 7. \tag{14}$$

Z kongruencí

$$\begin{aligned} 27 &\equiv -1 \pmod{7},\\ 9 &\equiv 2 \pmod{7},\\ 128 &\equiv 2 \pmod{7},\\ 262\,144 &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

a jejich využitím v (14) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$(-1) \cdot 2^l - 2 \cdot 1^k \equiv 0 \pmod{7}. \tag{15}$$

Podmínkou pro řešení kongruenční rovnice (15) je splnění kongruence $2^l \equiv 5 \pmod{7}$. Jelikož však pro všechna celá nezáporná čísla n dávají čísla 2^n při dělení 7 pouze zbytky 1, 2, 4, nemá kongruenční rovnice (15), ani rovnice (14), řešení v oboru přirozených čísel.

Závěr. Řešením dané úlohy je tedy jediná dvojice $(x, y) = (2, 1)$.

Příklad 6

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 7.$$

Řešení. Zřejmě $y \geq 3$, přitom pro $y = 3$ nemá rovnice řešení v oboru přirozených čísel. Pro $y \geq 4$ lze danou rovnici upravit do tvaru

$$2^y - 16 = 3^x - 9. \tag{16}$$

Levá strana rovnice (16) je evidentně větší nebo rovna 0, a tudíž $x \geq 2$. Pro $y = 4$ obdržíme řešení $(x, y) = (2, 4)$.

Jestliže $y \geq 5$, pak ze zadání plyne $x \geq 3$. Pro $x = 3$ však neexistuje přirozené číslo y splňující rovnici $2^y - 3^x = 7$. Je-li $x \geq 4$, lze rovnici (16) upravit do tvaru

$$2^y - 88 = 3^x - 81. \tag{17}$$

Dále rovnici (17) upravíme

$$2^y - 88 = 81\left(3^{x-4} - 1\right).$$

Tedy $81 \mid (2^y - 88) = 8(2^{y-3} - 11)$. Jelikož $81 \nmid 8$, je $81 \mid (2^{y-3} - 11)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 2 je $y - 3 = 13$. Dále pak 67, 121, 178 atd. Nutně tedy $y = 16 + 54l$, kde l je dané celé nezáporné číslo. Zároveň lze rovnici (17) upravit do tvaru

$$8\left(2^{y-3} - 11\right) = 3^x - 81.$$

Tedy $8 \mid (3^x - 81) = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $8 \nmid 81$, je $8 \mid (3^{x-4} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Další možné mocniny jsou pak 2, 4, 6, 8 atd. Proto $x = 4 + 2k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici $2^y - 3^x = 7$ přepíšeme do tvaru

$$2^{16+54l} - 3^{4+2k} = 4^{8+27l} - 9^{2+k} = \left(2^{8+27l} - 3^{2+k}\right)\left(2^{8+27l} + 3^{2+k}\right) = 7.$$

Jelikož $2^{8+27l} + 3^{2+k}$ je přirozené číslo (větší než 2), je také $2^{8+27l} - 3^{2+k}$ přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že 7 je prvočíslo, musí platit

$$2^{8+27l} + 3^{2+k} = 7 \quad \text{a} \quad 2^{8+27l} - 3^{2+k} = 1.$$

Odečtením těchto dvou rovnic obdržíme rovnici $3^{2+k} = 3$. Tedy pro exponent $2 + k$ platí $2 + k = 1$. Protože zároveň $x = 4 + 2k = 2(2 + k)$, pak $x = 2$, což je však ve sporu s předpokladem $x \geq 4$.

Závěr. Řešením dané úlohy v oboru přirozených čísel je jediná uspořádaná dvojice $(x, y) = (2, 4)$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 7$ má právě 2 řešení v oboru přirozených čísel, tj. řešení ve tvaru $(x, y) \in \{(2, 1), (2, 4)\}$, což je opět v souladu s větou 3.

V závěrečné části příspěvku uvádíme příklady exponenciálních diofantovských rovnic (příklady 7–9) tvořící tzv. *gradovaný řetězec úloh* (viz např. [6]), které byly využity v 62. ročníku (v roce 2013) MO v kategorii B. Ukazuje se tak, že uvedená problematika je vhodná pro práci s matematicky nadanými žáky a jejich přípravu na matematické soutěže.

Příklad 7 (62. MO, B–I–1)
Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro něž platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[*Řešení*: $(a, b, c) = (6n - 4, 3n - 2, 2n - 1)$, kde n je libovolné přirozené číslo.]

Příklad 8 (62. MO, B–S–1)
Dokažte, že žádná z rovnic

$$\begin{aligned} 3^{2x} + 6^y \ &= 2013, \\ |3^{2x} - 6^y| &= 2013 \end{aligned}$$

nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Příklad 9 (62. MO, B–II–3)
Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro něž platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

[*Řešení*: $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$, kde b je libovolné přirozené číslo.]

Podobné úlohy se vyskytují v posledních letech i v zahraničních matematických soutěžích. Dokladem toho jsou mj. následující dvě úlohy, k jejichž řešení lze využít elementárních metod popsaných v předešlých částech tohoto příspěvku. Obě tyto úlohy již ponecháváme k samostatnému rozmyšlení zájemcům o uvedenou problematiku.

Příklad 10 (Srbská MO, 2019)

Určete všechny dvojice (x, y) nezáporných celých čísel splňující rovnici

$$2^x = 5^y + 3.$$

[*Řešení*: $(x, y) \in \{(2, 0), (3, 1), (7, 3)\}$.]

Příklad 11 (Vietnamská MO, 2019)

Určete všechny trojice (x, y, z) přirozených čísel splňující rovnici

$$2^x + 1 = 7^y + 2^z.$$

[*Řešení*: $(x, y, z) \in \{(3, 1, 1), (6, 2, 4)\}$.]

Literatura

[1] *Bennett, M. A.*: On Some Exponential Equations of S. S. Pillai. Canad. J. Math., roč. 53 (2001), č. 5, 897–922.

[2] *Bennett, M. A.*: Pillai's conjecture revisited. Journal of Number Theory, roč. 98 (2003), 228–235.

[3] *Cassels, J. W. S.*: On the equation $a^x - b^y = 1$. Amer. J. Math., roč. 75 (1953), s. 159–162.

[4] *Riemel, T., Švrček J.*: Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice. Matematika, fyzika, informatika, roč. 29 (2020), č. 1, s. 1–6.

[5] *Senderov, V. A., Frenkin, B. R.*: Gipotěza Katalana. Kvant (2007), č. 4, s. 8–10 (rusky).

[6] *Švrček J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.

[7] *Žuravljov, B. M., Samavol, P. I.*: Eksponenciaľnyje diofantovy uravněnija i summa cifr čisla. Matěmatičeskoje prosvěščenije, roč. 3 (2016), č. 20 (rusky).

[8] *Metsänkylä, T.*: Catalan's conjecture: Another old Diophantine problem solved. Bull. Amer. Math. Soc., roč. 41 (2004), s. 43–57.