Překvapivá řešení jedné úlohy

RADOMÍR HALAŠ – MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Posluchačům závěrečného ročníku navazujícího studia (učitelství kombinace s matematikou), kteří na počátku letošního roku vypracovávali na PřF UP v Olomouci písemnou část ke státní závěrečné zkoušce z didaktiky matematiky, byla předložena mj. následující školská úloha.

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $|BC| = a$, $|AC| = b$ a s délkou v výšky z vrcholu C. Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}. \tag{1}$$

Při zadání úlohy jsme očekávali od studentů následující řešení, které považujeme i pro začínající učitele matematiky za nejsnazší.

Řešení 1

Vyjdeme ze známých vzorců pro výpočet obsahu S pravoúhlého trojúhelníku ABC. Při běžném označení délek jeho stran platí

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cv.$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{4S^2}, \qquad \frac{1}{b^2} = \frac{a^2}{4S^2}, \qquad \frac{1}{v^2} = \frac{c^2}{4S^2}.$$

Sečtením prvních dvou vztahů a následným využitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ABC bezprostředně obdržíme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{4S^2} + \frac{a^2}{4S^2} = \frac{a^2+b^2}{4S^2} = \frac{c^2}{4S^2} = \frac{1}{v^2}.$$

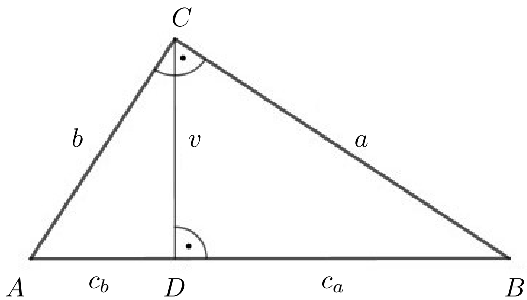
Tím je důkaz ukončen.

Při opravě studentských řešení nás překvapila poměrně velká rozmanitost použitých postupů. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s některými zajímavými postupy našich posluchačů při řešení této úlohy. Jejich modifikace dále uvádíme. Tyto přístupy lze uplatnit přímo ve výuce planimetrie na SŠ i ZŠ, zejména při procvičování problematiky Eukleidových vět a Pythagorovy věty.

Řešení 2 (pomocí Eukleidovy věty o výšce)

Označme D patu výšky z vrcholu C. Nejprve využijeme Pythagorovu větu v trojúhelnících BCD a ACD, viz obr. 1. Platí tedy

$$a^2 = v^2 + c_a^2, \qquad b^2 = v^2 + c_b^2.$$



Obr. 1

Po dosazení za $1/a^2$ a $1/b^2$ z těchto vztahů do levé strany dokazované identity dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2 + c_a^2} + \frac{1}{v^2 + c_b^2}.$$

Dále uplatníme Eukleidovu větu o výšce ve tvaru $v^2 = c_a c_b$. Postupně tak po úpravách obdržíme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2 + c_a^2} + \frac{1}{v^2 + c_b^2} =$$
$$= \frac{1}{c_a c_b + c_a^2} + \frac{1}{c_a c_b + c_b^2} = \frac{1}{(c_a + c_b)c_a} + \frac{1}{(c_a + c_b)c_b} =$$
$$= \frac{1}{c_a + c_b}\left(\frac{1}{c_a} + \frac{1}{c_b}\right) = \frac{c_a + c_b}{(c_a + c_b)c_a c_b} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2}.$$

Tím je důkaz ukončen.

Řešení 3 (pomocí Eukleidových vět)

V tomto řešení byla využita Pythagorova věta a dále Eukleidovy věty o odvěsnách ve tvaru $a^2 = c\,c_a$, $b^2 = c\,c_b$, z nichž plyne

$$a^2 b^2 = c^2 c_a c_b.$$

Dosazením za

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{c\,c_a} \quad \text{a} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c\,c_b}$$

do levé strany dokazované rovnosti a užitím Eukleidovy věty o výšce dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{(ac_a)(bc_b)} = \frac{c^2}{c_a c_b c^2} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Řešení 4 (pomocí Eukleidových vět – jiný způsob)

V tomto studentském řešení byly opět použity Eukleidovy věty o odvěsnách a o výšce, avšak autor postupoval jiným způsobem.

Za a^2 a b^2 dosadíme do součtu zlomků $1/a^2$ a $1/b^2$ z Eukleidových vět o odvěsnách ve tvaru $a^2 = cc_a$, $b^2 = cc_b$. Platí tak s využitím Eukleidovy věty o výšce

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{cc_a} + \frac{1}{cc_b} = \frac{1}{c}\left(\frac{c_a + c_b}{c_a c_b}\right) = \frac{c}{cc_a c_b} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2}.$$

Tím je důkaz ukončen.

Řešení 5 (pomocí Eukleidových vět – další způsob)

Užitím Eukleidových vět a dále rovnosti $c_a + c_b = c$ postupně obdržíme

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= (cc_a)(cc_b) = c^2 c_a c_b = \\ &= c(c_a + c_b)c_a c_b = cc_a^2 c_b + cc_a c_b^2 = (cc_a)(c_a c_b) + (cc_b)(c_a c_b) = \\ &= a^2 v^2 + b^2 v^2 = (a^2 + b^2)v^2. \end{aligned}$$

Odtud již dostáváme požadovanou rovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Řešení 6 (užitím podobnosti trojúhelníků)

Z podobnosti trojúhelníků ABC a ACD (obr. 1) plyne

$$\frac{a}{c} = \frac{v}{b}.$$

Následnými úpravami obdržíme $ab = cv$, a tedy $a^2b^2 = c^2v^2$. Užitím Pythagorovy věty na pravé straně poslední rovnosti dále máme

$$a^2b^2 = (a^2 + b^2)v^2.$$

Platí tak

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uvedená studentská řešení dané důkazové úlohy se opírají vesměs o využití známých tvrzení platných pro libovolný pravoúhlý trojúhelník – Pythagorovy věty a Eukleidových vět. Rozdíly mezi nimi představují především odlišné technické postupy při jejich využití v konkrétních řešeních.

Závěrem uvedeme (naopak) očekávané zobecnění vztahu (1), které představuje jeho prostorovou analogii. Dříve než k němu přistoupíme, připomeňme zobecnění Pythagorovy věty v prostoru, kterým je tzv. *Faulhaberova věta.* Její důkazy lze najít např. v článcích [1] a [2] publikovaných v časopise MFI.

Věta 1 (Faulhaberova)

V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách při vrcholu D, platí

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2,$$

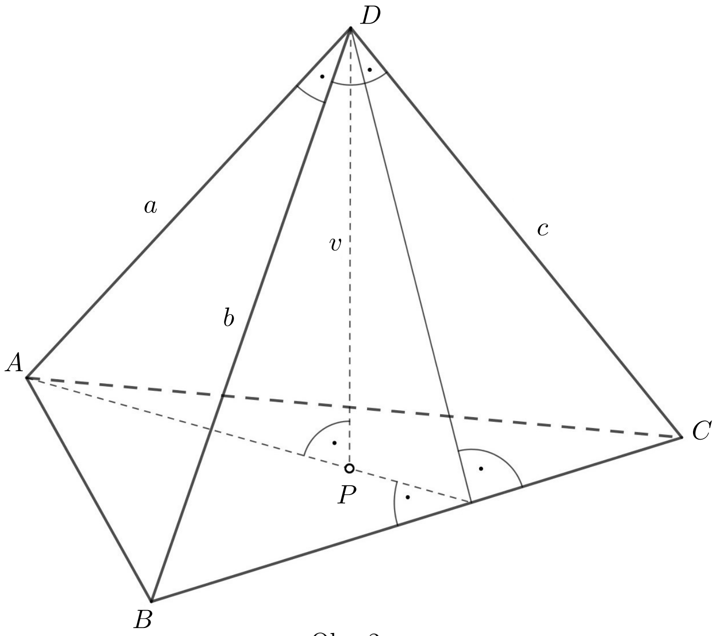
kde S_A, S_B, S_C a S_D jsou po řadě obsahy jeho stěn proti vrcholům A, B, C a D.

Věta 2

Nechť $ABCD$ je pravoúhlý čtyřstěn s pravými úhly ve stěnách při vrcholu D, v němž $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$ a v značí velikost jeho výšky z vrcholu D. Pak platí

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{v^2}. \tag{2}$$

(Výškou z vrcholu D v uvažovaném čtyřstěnu $ABCD$ rozumíme úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol D a pata P kolmice z vrcholu D k rovině ABC, viz. obr. 2.)



Obr. 2

Důkaz. Pro objem V uvažovaného pravoúhlého čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{3}S_A a = \frac{1}{3}S_B b = \frac{1}{3}S_C c = \frac{1}{3}S_D v, \tag{3}$$

kde S_A, S_B, S_C, S_D jsou po řadě obsahy jeho stěn BCD, CDA, DAB a ABC. Ze vztahu (3) plyne

$$\frac{1}{a^2} = \frac{S_A^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{S_B^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{S_C^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{v^2} = \frac{S_D^2}{9V^2}. \tag{4}$$

Sečtením prvních tří rovností (4) a využitím věty 1 dostáváme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{S_A^2}{9V^2} + \frac{S_B^2}{9V^2} + \frac{S_C^2}{9V^2} = \frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}{9V^2} = \frac{S_D^2}{9V^2} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

L i t e r a t u r a

[1] *Kuřina, F.*: Důkazy a kalkuly. Matematika, fyzika, informatika, roč. 20 (2010/2011), č. 1.

[2] *Švrček, J.*: Prostorové analogie dvou planimetrických vět. Matematika, fyzika, informatika, roč. 23 (2014), č. 2, s. 81–85.

Z historie výuky infinitezimálního počtu

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Lze říci, že otázka zavedení diferenciálního a integrálního počtu do výuky matematiky na středních školách je stále aktuální. Jsou zde jak příznivci, tak odpůrci této výuky. Zejména ze strany učitelů vysokých škol však často zaznívá názor, že je zbytečné zabývat se na střední škole ve výuce matematiky derivacemi a integrály, kterým většina žáků plně nerozumí, a že by bylo užitečnější věnovat se např. lomeným výrazům. Otázka porozumění infinitezimálnímu počtu je složitější – v této souvislosti lze upozornit na článek [1]. Mezi učiteli matematiky mám řadu přátel a vím, že někteří z nich začali studovat matematiku právě proto, že se již na střední škole seznámili se základy infinitezimálního počtu. V současném rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G) není diferenciální a integrální počet uveden, to však neznamená, že by nebyl na současných gymnáziích vyučován, většinou je ale zařazen do volitelné výuky.

Zařazení diferenciálního a integrální počtu do výuky matematiky na gymnáziích souvisí s tzv. Marchetovou reformou středního školství v roce 1908. Nové učební osnovy a plány pro gymnázia a reálky byly vyhlášeny v roce 1909. Jedná se o poslední úpravy učebních osnov gymnázií a reálek v rámci Rakousko-Uherska. Nařízení ministra kultu a vyučování bylo vy-