Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 269 a 270 můžete zaslat nejpozději do 30. 9. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 269

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, v němž K je střed jeho přepony AB. Uvažujme pravoúhlé trojúhelníky KLM s pravým úhlem při vrcholu M, kde vrcholy L, M leží po řadě uvnitř odvěsen BC, AC. Sestrojte bod L tak, aby úsečka BL měla co nejmenší délku.

Jaroslav Švrček

Úloha 270

Uvažujme čísla $a = 2\cos(\pi/7)$, $b = 2\cos(3\pi/7)$ a $c = 2\cos(5\pi/7)$. Dokažte, že tři výrazy $a+b+c$, $1/a+1/b+1/c$, abc nabývají celočíselných hodnot.

Pavel Calábek

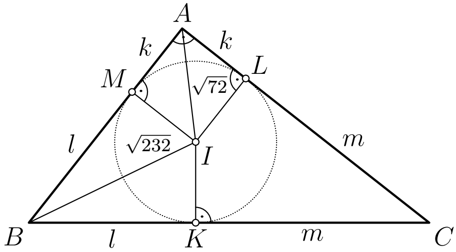
Dále uvádíme řešení úloh 265 a 266, jejichž zadání jsme zveřejnili v závěrečném čísle minulého (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 265

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice jemu vepsané. Určete obvod tohoto trojúhelníku, je-li dáno $|AI| = \sqrt{72}$ a $|BI| = \sqrt{232}$.

Josef Tkadlec

Řešení. Označme K, L, M body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Ze souměrnosti kružnice podle přímky procházející jejím středem plyne $|AL| = |AM|$, $|BK| = |BM|$, $|CK| = |CM|$ a tyto vzdálenosti označme po řadě k, l, m.



Z pravých úhlů u vrcholů A, L a M ve čtyřúhelníku $ALIM$ plyne, že jde o čtverec se stranou délky k. Podle zadání je délka jeho úhlopříčky AI rovna $\sqrt{72}$, proto je délka jeho strany $k = \sqrt{72}/\sqrt{2} = 6$. Užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku BIM máme

$$l = |BM| = \sqrt{|BI|^2 - |IM|^2} = \sqrt{232 - 6^2} = 14.$$

Konečně, podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí

$$(14 + m)^2 = (l + m)^2 = (k + m)^2 + (k + l)^2 = (6 + m)^2 + 20^2.$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$16m = 20^2 + 6^2 - 14^2 = 240,$$

tedy $m = 15$. Obvod trojúhelníku ABC je tedy

$$2(k + l + m) = 2(6 + 14 + 15) = 70.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Amálie Dostalíková*, *Anna Pecháčková*, obě z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Štěpán Postava* z GMK v Bílovci a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslal *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou.

Úloha 266

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 2020,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a.

Jaroslav Švrček

Řešení. Ze zadání je patrné, že čísla m, n jsou menší než 2020, jsou tudíž obě nejvýše čtyřmístná. Nechť $m = \overline{a_m b_m c_m d_m}$ a $n = \overline{a_n b_n c_n d_n}$, kde a_i, b_i, c_i a d_i jsou číslice. Rovnici

$$m + s(n) = n + s(m)$$

upravíme do tvaru

$$999(a_m - a_n) = 99(b_n - b_m) + 9(c_n - c_m). \tag{1}$$

Pro číslice b_i a c_i zřejmě platí $-9 \leq b_n - b_m \leq 9$ a $-9 \leq c_n - c_m \leq 9$, proto

$$-972 = -99 \cdot 9 - 9 \cdot 9 \leq 99(b_n - b_m) + 9(c_n - c_m) \leq 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 972.$$

Z podmínky (1) tak plyne, že $a_m = a_n$, označme tuto číslici jako a. Rovnici (1) můžeme dále přepsat do tvaru

$$99(b_m - b_n) = 9(c_n - c_m).$$

Jelikož $-81 \leq 9(c_n - c_m) \leq 81$, platí $b_m = b_n$ a $c_m = c_n$. Označme $b = b_m = b_n$ a $c = c_m = c_n$. Čísla m a n můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$m = \overline{abcd_m}, \qquad n = \overline{abcd_n}.$$

Rovnici $n + s(m) = 2020$, resp. $m + s(n) = 2020$, nyní upravíme do tvaru

$$1001a + 101b + 11c + (d_m + d_n) = 2020. \tag{2}$$

Pro číslice b, c, d_m, d_n platí

$$0 \leq 101b + 11c + (d_m + d_n) \leq 101 \cdot 9 + 11 \cdot 9 + (9 + 9) = 1026,$$

odkud je patrné, že $a \in \{1, 2\}$. Oba případy posoudíme jednotlivě.

- V případě $a = 1$ má rovnice (2) tvar

$$101b + 11c + (d_m + d_n) = 1019.$$

  Z odhadu $0 \leq 11c + (d_m + d_n) \leq 11 \cdot 9 + (9 + 9) = 117$ plyne $b = 9$. Platí tak $11c + (d_m + d_n) = 110$. Jelikož $0 \leq d_m + d_n \leq 18$, plyne odtud $c = 9$, tedy $d_m + d_n = 11$, odkud dostáváme

$$(d_m, d_n) \in \{(2; 9), (3; 8), (4; 7), (5; 6), (6; 5), (7; 4), (8; 3), (9; 2)\}.$$

- V případě $a = 2$ má rovnice (2) tvar

$$101b + 11c + (d_m + d_n) = 18.$$

Odtud již nutně $b = 0$, platí tak $11c + (d_m + d_n) = 18$. Jelikož je $0 \leq d_m + d_n \leq 18$, plyne odtud $c \in \{0, 1\}$.

Pokud $c = 0$, platí $d_m + d_n = 18$, tedy $d_m = d_n = 9$.

Pokud $c = 1$, platí $d_m + d_n = 7$, tedy

$$(d_m, d_n) \in \{(0; 7), (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1), (7; 0)\}.$$

Existuje tak 17 hledaných dvojic čísel (m, n), viz následující tabulka.

m	n	m	n	m	n	m	n
1992	1999	1996	1995	2010	2017	2014	2013
1993	1998	1997	1994	2011	2016	2015	2012
1994	1997	1998	1993	2012	2015	2016	2011
1995	1996	1999	1992	2013	2014	2017	2010
		2009	2009				

Poznámka. Protože $m, n < 2020$, jsou ciferné součty $s(m)$ a $s(n)$ nejvýše rovny $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Odtud plyne, že čísla m a n jsou obě větší nebo rovna 1992. Úlohu lze také vyřešit otestováním všech 28 čísel $m \in \{1992, 1993, \ldots, 2019\}$, pro která určíme $n = 2020 - s(m)$ a ověříme, zda pro ně platí $m + s(n) = 2020$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Amálie Dostalíková*, *Anna Pecháčková*, obě z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci, *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská a *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně a *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Pavel Calábek