ZPRÁVY A INFORMACE

Ústřední kolo 70. ročníku MO kategorie A

Jubilejní, 70. ročník Matematické olympiády (MO) byl poznamenán, stejně jako celý vzdělávací systém, epidemií covid-19. Přesto se jej podařilo ústřední komisi matematické olympiády za pomoci krajských a okresních komisí uspořádat. Zde bychom chtěli poděkovat hlavně všem učitelům matematiky základních a středních škol, bez jejichž snahy a úsilí by to v období online výuky vůbec nebylo možné. Všechna kola MO byla uspořádána distanční formou, kdy žáci řešili úlohy samostatně doma.

Ústřední kolo 70. ročníku MO se konalo ve dnech 21.–24. března 2021 a celé proběhlo, stejně jako všechna předcházející soutěžní kola, v distanční formě. Z 318 řešitelů krajských kol kategorie A bylo k účasti pozváno 42 nejlepších řešitelů, kteří v krajském kole získali (po celostátní koordinaci) alespoň 18 bodů. Tito účastníci reprezentovali 23 různých škol z 8 krajů České republiky.

Soutěž zahájili v neděli 21. března předseda ústřední komise MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* spolu s předsedkyní Jednoty českých matematiků a fyziků *doc. RNDr. Alenou Šolcovou, Ph.D.,* a děkanem Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze *doc. RNDr. Mirko Rokytou, CSc.* Jejich online projevy nejen uvítaly účastníky ústředního kola, ale také otestovaly webové prostředí, ve kterém účastníci doma pod dohledem kamer následující dny soutěžili. Pondělí a úterý již byly věnovány vlastní soutěži, kdy každý den řešitelé pět minut před začátkem soutěže obdrželi zadání, poté měli 4,5 hodiny času na řešení úloh a dalších 20 minut na nahrání svých řešení do nově vzniklého systému pro odevzdávání úloh MO (OSMO). Zatímco účastníci mohli spolu komunikovat v online prostředí, na jejich řešeních začali pracovat opravovatelé, většinou vítězové předcházejících ročníků MO. Ve středu 24. března byly opravy ukončeny a večer se konalo (opět online) slavnostní vyhlášení výsledků ústředního kola, kde vítěze mimo předsedy MO ocenil také zástupce skupiny ČEZ *Mgr. Martin Máca.*

Dle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno sedm vítězů ústředního kola, z nichž dva, *Samuel Rosiar* a *Matouš Šafránek*, oba z G Jana Keplera v Praze 6, získali plný počet 42 bodů. Dále bylo oceněno dvanáct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/70-rocnik-20-21 70. ročníku Matematické olympiády. Tam také najdete vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

První soutěžní den
(22. března 2021)

1. Zlomek s 1010 políčky v čitateli a 1011 políčky ve jmenovateli slouží jako hrací plán pro hru dvou hráčů.

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč vybere jedno z čísel 1, 2, ..., 2021 a vloží ho do libovolného prázdného políčka. Každé číslo přitom může být použito jen jednou. Začínající hráč vyhrává, jestliže se hodnota zlomku po zaplnění všech políček liší od čísla 1 o méně než 10^{-6}. V opačném případě vyhrává druhý hráč. Rozhodněte, který z hráčů má vítěznou strategii.

2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c splňují množinovou rovnost

$$\{a + b, b + c, c + a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokažte, že platí rovněž rovnost

$$\{a, b, c\} = \{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}.$$

Druhý soutěžní den
(22. března 2021)

4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \ldots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

5. Řetězec znaků nazveme *úhledným*, má-li sudou délku a jeho první polovina je shodná s druhou polovinou (např. *abab*). Řetězec nazveme *pěkným*, pokud ho lze rozdělit na několik úhledných řetězců (jako *abcabcdedeff* na *abcabc*, *dede* a *ff*). *Redukcí* řetězce nazveme operaci, při které z řetězce smažeme dva stejné sousední znaky (např. řetězec *abbac* lze zredukovat na *aac* a ten dále na *c*). Dokažte, že libovolný řetězec obsahující každý svůj znak v sudém počtu lze získat sérií redukcí z vhodného pěkného řetězce.

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových souměrnostech po řadě podle přímek BC, CA, AB. Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.

Pavel Calábek

10. evropská dívčí MO (EGMO)

Organizace jubilejního 10. ročníku Evropské dívčí MO (EGMO), který se tradičně konal v polovině dubna letošního roku, se ujala Gruzie. Vlastní soutěž se konala (stejně jako v loňském roce) distanční formou, kdy všechny soutěžící řešily zadané úlohy ze svých domovů. Organizátoři soutěže v gru-