První soutěžní den
(22. března 2021)

1. Zlomek s 1010 políčky v čitateli a 1011 políčky ve jmenovateli slouží jako hrací plán pro hru dvou hráčů.

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč vybere jedno z čísel 1, 2, …, 2021 a vloží ho do libovolného prázdného políčka. Každé číslo přitom může být použito jen jednou. Začínající hráč vyhrává, jestliže se hodnota zlomku po zaplnění všech políček liší od čísla 1 o méně než 10^{-6}. V opačném případě vyhrává druhý hráč. Rozhodněte, který z hráčů má vítěznou strategii.

2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c splňují množinovou rovnost

$$\{a + b, b + c, c + a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokažte, že platí rovněž rovnost

$$\{a, b, c\} = \{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}.$$

Druhý soutěžní den
(22. března 2021)

4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \ldots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

5. Řetězec znaků nazveme *úhledným*, má-li sudou délku a jeho první polovina je shodná s druhou polovinou (např. *abab*). Řetězec nazveme *pěkným*, pokud ho lze rozdělit na několik úhledných řetězců (jako *abcabcdedeff* na *abcabc*, *dede* a *ff*). *Redukcí* řetězce nazveme operaci, při které z řetězce smažeme dva stejné sousední znaky (např. řetězec *abbac* lze zredukovat na *aac* a ten dále na *c*). Dokažte, že libovolný řetězec obsahující každý svůj znak v sudém počtu lze získat sérií redukcí z vhodného pěkného řetězce.

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových souměrnostech po řadě podle přímek BC, CA, AB. Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.

Pavel Calábek

10. evropská dívčí MO (EGMO)

Organizace jubilejního 10. ročníku Evropské dívčí MO (EGMO), který se tradičně konal v polovině dubna letošního roku, se ujala Gruzie. Vlastní soutěž se konala (stejně jako v loňském roce) distanční formou, kdy všechny soutěžící řešily zadané úlohy ze svých domovů. Organizátoři soutěže v gruzínském Kutaisi se snažili zajistit pro online soutěž co nejregulérnější podmínky, kdy všechny soutěžící pracovaly pod dozorem kamer. Soutěžními dny byly neděle 11. dubna a pondělí 12. dubna 2021. Po oba soutěžní dny byly reprezentantkám jednotlivých zemí předloženy vždy tři náročné soutěžní úlohy. Za bezchybné vyřešení každé z nich mohly soutěžící získat 7 bodů.

Desátého ročníku soutěže se zúčastnil dosud rekordní počet soutěžících – celkově 213 z 55 zemí všech kontinentů (z toho 37 evropských zemí). Nechyběla mezi nimi tradičně i silná mimoevropská družstva USA, Kanady, Austrálie, Japonska, Brazílie, Mexika a další.

České reprezentační družstvo středoškolaček se této soutěže zúčastnilo již pošesté. Reprezentační čtveřice dívek byla definitivně vybrána na základě výsledků v krajském kole kategorie A (v 70. ročníku MO), a to bezprostředně po ukončení centrální koordinace úloh v rámci celé České republiky. Oproti předešlým dvěma letům, kdy jsme se museli obejít bez maturantek, kumulace maturitních písemek a 10. EGMO letos odpadla. Tím vznikla možnost účasti v této mezinárodní soutěži i pro naše maturantky. Místa v reprezentaci si nakonec vybojovala následující čtveřice dívek: *Adéla Heroudková* (7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Vendula Onderková* (7/8, G Jakuba Škody, Přerov), *Klára Pernicová* (8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) a *Adéla Karolína Žáčková* (8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucími české delegace byli *Mgr. Pavel Šalom* a bývalá úspěšná olympionička *Lenka Kopfová*.

České družstvo si vedlo v silné mezinárodní konkurenci soutěži velmi dobře. Poprvé se tak stalo, že všechny čtyři naše dívky vybojovaly na EGMO medaili, když svorně získaly bronzové medaile. To svědčí o vyrovnanosti českého výběru pro tuto soutěž. Nejlepší z našich dívek – Kláře Pernicové unikla přitom stříbrná medaile o jediný bod, když získala celkově 13 bodů. Ostatní tři dívky se vešly do bodového intervalu pro zisk bronzové medaile (letos to bylo 8–13 bodů) následovně: Adéla Heroudková (10 b.), Adéla Karolína Žáčková (9 b.) a Vendula Onderková (8 b.). Každá z dívek přitom vyřešila bezchybně právě jednu soutěžní úlohu (první tři jmenované dívky úlohu č. 1 a poslední z nich úlohu č. 4). Podrobnější informace o 10. ročníku EGMO najdou zájemci na stránkách https://www.egmo.org/.

Příští 11. ročník EGMO se bude konat od 6. do 12. dubna 2022 v maďarském Egeru. Pevně věříme, že i v Maďarsku si naše dívky povedou stejně dobře jako v letošním ročníku.

Dále uvádíme texty všech soutěžních úloh zadaných na 10. EGMO.

1. soutěžní den
(11. 4. 2021)

Úloha 1

Číslo 2021 je *bombastické.* Pokud je libovolné číslo z množiny

$$\{m, 2m+1, 3m\}$$

bombastické pro nějaké přirozené číslo m, potom jsou všechna čísla z této množiny bombastická. Plyne z toho, že číslo 2021^{2021} je bombastické?

(*Austrálie*)

Úloha 2

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že rovnice

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

platí pro všechna racionální čísla x a y.

Symbol $\mathbb{Q}$ zde značí množinu všech racionálních čísel.

(*Slovensko*)

Úloha 3

Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu A. Nechť E a F jsou v tomto pořadí průsečíky osy vnějšího úhlu při vrcholu A s výškami v trojúhelníku ABC z vrcholů B a C. Na úsečkách EC a FB zvolme po řadě body M a N tak, aby platilo $|\sphericalangle EMA| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle ANF| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že body E, F, N, M leží na téže kružnici.

(*Ukrajina*)

2. soutěžní den

(12. 4. 2021)

Úloha 4

V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice jemu vepsané a zvolme libovolný bod D na straně BC. Označme E průsečík kolmice k BI procházející bodem D s přímkou CI. Dále označme F průsečík kolmice k CI procházející bodem D s přímkou BI. Dokažte, že obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky EF leží na přímce BC.

(*Austrálie*)

Úloha 5

V rovině zvolme bod O, který nazveme počátek. Nechť P je množina 2021 bodů v této rovině takových, že

(i) žádné tři body z množiny P neleží na jedné přímce a
(ii) žádné dva body z množiny P neleží na přímce procházející počátkem.

Trojúhelník s vrcholy v množině P nazveme *tlustý*. Určete maximální počet tlustých trojúhelníků.

(*Rakousko*)

Úloha 6

Existuje celé nezáporné číslo a, pro které má rovnice

$$\left\lfloor\frac{m}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{m}{m}\right\rfloor = n^2+a$$

více než milion různých řešení (m, n), kde m, n jsou přirozená čísla?

Výraz $\lfloor x\rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x. Tedy $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, $\lfloor\pi\rfloor = 3$, $\lfloor 22/7\rfloor = 3$, $\rfloor 42\rfloor = 42$ a $\lfloor 0\rfloor = 0$.

(*Rakousko*)

Jaroslav Švrček

Celostátní kolo 62. ročníku FO

Ve školním roce 2020/2021 proběhl 62. ročník Fyzikální olympiády on-line v souvislosti s protiepidemickými opatřeními a omezeními kvůli šíření koronaviru COVID-19. Nevyhnulo se tomu ani celostátní kolo (naplánované původně do Plzně). Z krajských kol, která proběhla ve středu 20. 1. 2021 postoupilo 50 soutěžících, z nichž 47 se nakonec do on-line soutěže zapojilo (z toho 3 dívky). Celostátní kolo proběhlo bez jakéhokoli doprovodného programu, v obvyklém rozsahu se vzdáleně realizovala „pouze“ soutěž samotná.