Důkazy v planimetrii užitím vektorů

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

1. Vektory ve školské geometrii

V matematice na ZŠ a SŠ jedním z hlavních prostředků i cílů výuky je rozvoj schopností (kompetence) žáků řešit *matematické úlohy*. Ve školské praxi se obvykle řeší především *úlohy určovací* (*výpočetní či konstrukční*) a méně již *úlohy aplikační*, avšak pro skutečné (neformální) porozumění matematice má též zásadní význam řešení *úloh důkazových* (viz [1] nebo [2, s. 33–42, s. 90–108]). Přitom při řešení důkazových úloh v geometrii (planimetrii a stereometrii) lze použít čtyři typy *metod eukleidovské geometrie* (viz [1] a [4]): *metody syntetické geometrie*, *metody souřadnicové analytické geometrie*, *užití vektorů* (*vektorové algebry*) a *užití komplexních čísel* (*algebry v oboru* $\mathbb{C}$).

V našich současných učebnicích planimetrie a stereometrie pro ZŠ a SŠ jsou používány výhradně klasické metody syntetické geometrie. Souřadnicové a vektorové metody jsou obsaženy až v učebnicích analytické geometrie pro SŠ, ve kterých se jejich užitím vyšetřují polohové a metrické vlastnosti rovinných, resp. prostorových geometrických útvarů. S využitím vektorů při řešení planimetrických a stereometrických úloh se však mohou seznámit zejména účastníci matematických olympiád (např. viz [5] nebo [6]).

Poznámka 1. Ve druhé polovině 20. století v Rusku a v dalších evropských zemích bylo teoreticky zkoumáno i realizováno uplatnění vektorů ve výuce geometrie (viz např. [7]). S jejich efektivním využitím se lze setkat též ve sbírkách úloh z planimetrie (viz např. [8]) a stereometrie.

Výhody metody užití geometrických vektorů pro řešení úloh v geometrii jsou zejména jednoduchost a názornost. Podle *Františka Kuřiny* (viz [9]) je také charakteristická jejich elegance. Za velmi důležitou považuji skutečnost, že při řešení geometrických úloh pomocí vektorů na rozdíl od užití syntetických metod není zpravidla nutné provádět diskusi řešení (např. samostatné řešení pro úhly ostré a pro úhly tupé). V důkazových úlohách je též obvykle snadnější ověřování platnosti obrácených vět. Připomeňme ještě i význam metody užití vektorů a metody užití komplexních čísel jako důležitého doplňku metod syntetické geometrie pro důkladné porozumění matematice, což přesvědčivě zdůrazňuje *Vlastimil Dlab* (mj. v článku [10]).

Poznámka 2. V publikovaném příspěvku se věnujeme důkazům planimetrických vět metodou užití vektorů, metodě užití komplexních čísel chceme věnovat komplementární článek. V obou příspěvcích takto tematicky navazujeme na článek [11] o důkazech metodami syntetické geometrie.

Hlavním cílem našeho článku je *prezentace příkladů* důkazů významných matematických vět planimetrie užitím geometrických vektorů. Příklady jsou zvoleny tak, aby je bylo možné vhodně využít ve středoškolské výuce matematiky. Jejich jednotné a co nejjednodušší pojetí je založeno na *vektorové algebře geometrických (volných)* vektorů.

Geometrický (volný) vektor značíme $\boldsymbol{u}$, jeho velikost $u = |\boldsymbol{u}|$, apod. Speciálně nulový vektor se značí $\boldsymbol{o}$, jeho velikost je $|\boldsymbol{o}| = 0$. Zápisem $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$ vyjadřujeme (jak je obvyklé), že orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ představuje jedno (dané nebo zvolené) *umístění vektoru* $\boldsymbol{u}$ v rovině (popř. v prostoru), přičemž $u = |\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{AB}| = |AB|$. Pro nulový vektor se klade $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{AA}$. Ve vektorové algebře se definují operace sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení vektoru reálným číslem a odvozují se jejich další vlastnosti. Připomeňme zejména, že *součtem vektorů* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{BC}$ se nazývá takový vektor $\boldsymbol{w}$ (označovaný $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$), že $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$, kde

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC}. \tag{1}$$

Vektorovou rovnost (1) je užitečné si zapamatovat a paralelně (zejména kontrolně) používat též v ekvivalentním symbolickém vyjádření

$$C - A = (B - A) + (C - B). \tag{2}$$

Připomeňme ještě, že *rozdílem vektorů* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AD}$ (v tomto pořadí) se nazývá vektor (označovaný $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$) takový, že $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{BD}$, přičemž je

$$\boldsymbol{DB} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AD}. \tag{3}$$

V článku dále využijeme pro nenulové vektory *skalární součin vektorů* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (označovaný $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$) ve tvaru

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = uv \cos\varphi, \tag{4}$$

kde $u = |\boldsymbol{u}|$, $v = |\boldsymbol{v}|$ jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\varphi = |\sphericalangle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = |\sphericalangle BAC|$ je odchylka vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, tj. velikost konvexního úhlu sevřeného orientovanými úsečkami $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ (umístěními vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ se společným počátečním bodem A). Pro φ platí $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ (resp. $0 \leq \varphi \leq \pi$ v obloukové míře). Operace skalárního násobení vektorů je *komutativní* ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$). Speciálně je

$$\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = u^2 \cos 0^\circ = u^2. \tag{5}$$

Pro každé dva nenulové vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ platí vektorové rovnosti

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = u^2 + v^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{6}$$

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})^2 = u^2 + v^2 - 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{7}$$

odkud po sečtení rovností (6) a (7) se dostává významná vektorová rovnost

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = 2(u^2 + v^2), \text{ kde } u = |\boldsymbol{u}|, \ v = |\boldsymbol{v}|. \tag{8}$$

A pro každé tři nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ platí vektorová rovnost (vyjadřující *distributivnost* operace skalárního násobení vektorů vzhledem ke sčítání vektorů)

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}. \tag{9}$$

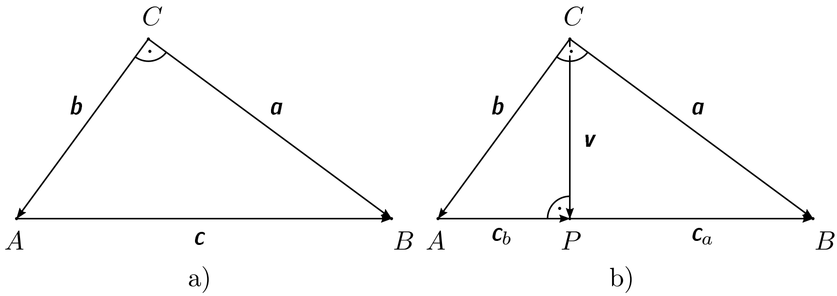
2. Důkazy Pythagorovy věty a Eukleidových vět užitím vektorů

Příklad 1

Dokažte užitím geometrických vektorů *Pythagorovu větu*: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Označíme-li délky odvěsen a, b, délku přepony c, pak

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{10}$$

Důkaz. Pro vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$ (obr. 1a) je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, takže $\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, přičemž $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, a tedy platí rovnost (10).



Obr. 1

Příklad 2

Dokažte *obrácenou Pythagorovu větu*: Jestliže pro délky stran a, b, c trojúhelníku ABC platí rovnost $c^2 = a^2 + b^2$ pak je tento trojúhelník pravoúhlý s vrcholem pravého úhlu v bodě C.

Důkaz. Při označení jako v příkladu 1 plyne z rovnosti $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, že $\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$, čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Užitím předpokladu $c^2 = a^2 + b^2$ dostáváme $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, tj. $\gamma = |\sphericalangle ACB| = 90°$.

Příklad 3

Dokažte užitím geometrických vektorů Eukleidovy věty o výšce a odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku.

Eukleidova věta o výšce: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky výšky k přeponě rovna součinu délek úseků přepony vyťatých na ní patou P této výšky (obr. 1b):

$$v^2 = c_a c_b. \tag{11}$$

Eukleidova věta o odvěsnách: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délky přepony a délky přilehlého úseku přepony (obr. 1b):

$$a^2 = cc_a, \quad b^2 = cc_b. \tag{12}$$

Důkazy. Pro vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{c}_b = \boldsymbol{AP}$, $\boldsymbol{c}_a = \boldsymbol{PB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{CP}$ (obr. 1b) je $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, přičemž $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_a + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}_b + \boldsymbol{v}$, takže $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}_a) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}_b) = 0$ čili $\boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{c}_a \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}_b \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}_a \cdot \boldsymbol{c}_b = 0$, kde $\boldsymbol{v}^2 = v^2$, $\boldsymbol{c}_a \cdot \boldsymbol{c}_b = c_a c_b$, $\boldsymbol{c}_a \perp \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{c}_a \cdot \boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{c}_b \perp \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{c}_b \cdot \boldsymbol{v} = 0$, a tedy po dosazení $v^2 = c_a c_b$.

Obdobně $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, kde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}_a$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_b$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, takže $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}_a) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$, odkud $a^2 = cc_a$ a $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_b) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$, odkud $b^2 = cc_b$.

3. Vektorové důkazy některých zobecnění Pythagorovy věty

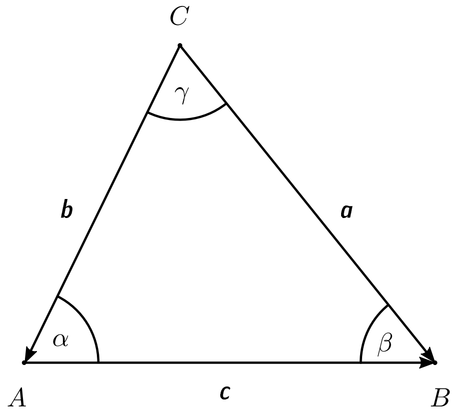
Příklad 4

Dokažte užitím geometrických vektorů *kosinovou větu* pro obecný trojúhelník: Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a vnitřní úhel proti jeho straně AB má velikost γ ($\gamma = |\sphericalangle ACB|$), platí rovnost

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{13}$$

(Další dvě obdobné rovnosti pro a^2, b^2 se dostanou cyklickou záměnou označení.)

Důkaz. Pro vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$ (obr. 2) je $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, a tedy $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|$.



Obr. 2

Poznámka 3. Kosinová věta je zobecněním Pythagorovy věty: pro $\gamma = 90°$ je $\cos \gamma = 0$, a tedy ze vzorce (13) vyplývá speciálně vzorec (10). V zahraniční literatuře (zejména francouzské) je tato věta někdy uváděna pod názvem *Al-Kášího (Al-Kashiho) věta*. Arabský matematik a astronom *al-Káší* (14.–15. stol.) ji formuloval v podobě blízké jejímu dnešnímu tvaru, ve kterém ovšem byla vyjádřena až francouzským matematikem („otcem algebry“) *Françoisem Viètem* (1540–1603).

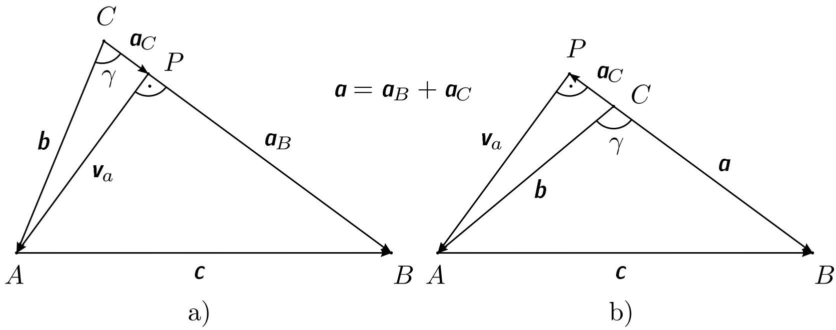
Příklad 5

Dokažte pomocí geometrických vektorů *zobecněný tvar Pythagorovy věty pro obecný trojúhelník* (podle [10]): Pro libovolný trojúhelník ABC, jehož strany mají délky $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, P je pata kolmice vedené bodem A k protější straně BC, příslušná výška AP má délku $|AP| = v_a$ a délky úseček BP, PC jsou $|BP| = a_B$, $|PC| = a_C$, platí rovnost

$$b^2 + a_B^2 = c^2 + a_C^2. \tag{14}$$

(Jde o zobecněný tvar Pythagorovy věty, neboť speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC, v němž je $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $a_C = 0$, $a_B = a$, rovnost (14) nabývá tvaru $b^2 + a^2 = c^2$.)

Důkaz. Použijeme vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{PB}$, $\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{CP}$ (obr. 3a, b).



Obr. 3

Platí rovnosti $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}_C$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_C$. Odtud plyne $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{v}_a$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{v}_a$, takže $b^2 = a_C^2 + v_a^2 + 2\boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{v}_a = a_C^2 + v_a^2$ (neboť $\boldsymbol{a}_C \perp \boldsymbol{v}_a \Rightarrow \boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{v}_a = 0$), $c^2 = a_B^2 + v_a^2 + 2\boldsymbol{a}_B \cdot \boldsymbol{v}_a = a_B^2 + v_a^2$ (neboť $\boldsymbol{a}_B \perp \boldsymbol{v}_a \Rightarrow \boldsymbol{a}_B \cdot \boldsymbol{v}_a = 0$), a tedy $b^2 - a_C^2 = c^2 - a_B^2$ čili $b^2 + a_B^2 = c^2 + a_C^2$.

Příklad 6

Užitím vektorového vyjádření dokažte ekvivalenci zobecněného tvaru Pythagorovy věty z příkladu 5 a kosinové věty z příkladu 4.

Důkaz. Rovnost (14) vyjádříme ve tvaru $c^2 = a_B^2 - a_C^2 + b^2$, který upravíme postupnými ekvivalentními vektorovými úpravami:

$$\begin{aligned} c^2 &= \boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}_B^2 - \boldsymbol{a}_C^2 + \boldsymbol{b}^2 = \\ &= (\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_C) \cdot (\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_C) + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}_C) + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{b}^2 = \\ &= a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}_C, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}_C = a a_C \cos |\sphericalangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_C| = ab \cos \gamma$. Po dosazení dostáváme rovnost (13).

Příklad 7

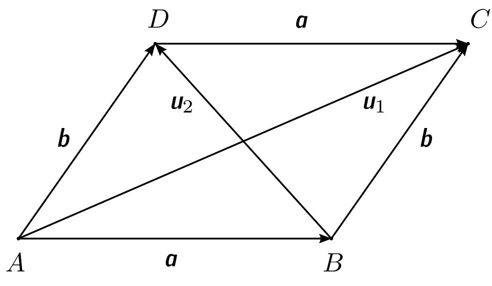
Pomocí vektorového vyjádření dokažte *větu o rovnoběžníku* (*pro délky úhlopříček rovnoběžníku*): V každém rovnoběžníku $ABCD$, jehož strany mají délky $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$, pro jeho úhlopříčky o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$, platí rovnost

$$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2). \tag{15}$$

Důkaz. Užitím vektorů $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{BD}$ (obr. 4), a tedy $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, odkud vyplývá, že

$$u_1^2 + u_2^2 = \boldsymbol{u}_1^2 + \boldsymbol{u}_2^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = 2(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2) = 2(a^2 + b^2),$$

tj. platí rovnost (15).



Obr. 4

Poznámka 4. Větu o rovnoběžníku dokázanou v příkladu 7 lze považovat za zobecnění Pythagorovy věty, neboť speciálně pro pravoúhelník (obdélník, popř. čtverec) $ABCD$ s úhlopříčkami o délce $u = |AC| = |BD|$

rovnost (15) nabývá tvaru $u^2 = a^2 + b^2$ a tato rovnost je vyjádřením Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a ADC. Významné však zejména je uvědomit si, že věta o rovnoběžníku představuje názornou *geometrickou interpretaci* rovnosti (8) pro velikosti nenulových vektorů (prvků vektorového prostoru geometrických vektorů). Tato skutečnost nabyla zvláště na významu, když v roce 1935 dokázal význačný americký matematik maďarského původu *John von Neumann* (1903–1957), že analogická rovnost platí pro normy prvků obecných (abstraktních) vektorových prostorů jistého typu, tzv. *Hilbertových prostorů.* Na základě uvedené geometrické analogie tato rovnost pro normy prvků Hilbertových prostorů je nazývána (v lineární algebře a ve funkcionální analýze) *rovnoběžníkové pravidlo.*

Příklad 8

Zajímavým a důležitým speciálním případem čtyřúhelníků jsou konvexní čtyřúhelníky, jimž lze opsat kružnici. Jejich strany jsou tětivami této kružnice $k_\circ$, a proto se nazývají *tětivové čtyřúhelníky.* Mají řadu velmi pozoruhodných vlastností. Dokažte, že pro ně platí následující dvě věty.

Věta o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jeho protější (protilehlé) vnitřní úhly jsou výplňkové úhly, tj. pro jejich velikosti $\alpha = |\sphericalangle DAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCD|$, $\delta = |\sphericalangle CDA|$ platí rovnosti

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \tag{16}$$

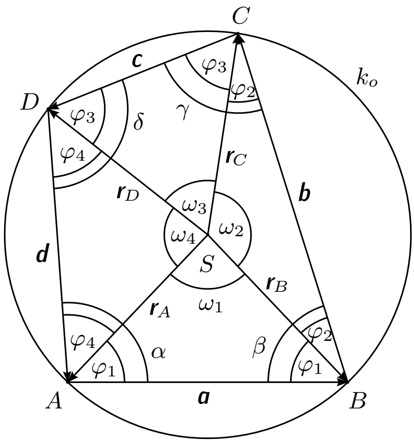
Ptolemaiova věta: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ součin délek jeho úhlopříček je roven součtu součinů délek protějších (protilehlých) stran čtyřúhelníku, tj. označíme-li $u_1 = |AC|$, $u_2 = |BD|$, $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, platí rovnost

$$u_1 u_2 = ac + bd. \tag{17}$$

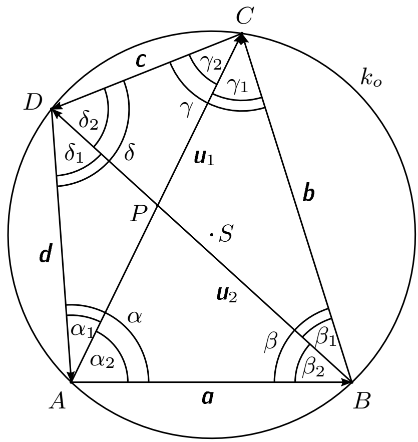
Důkazy. Označíme S střed opsané kružnice $k_\circ$, P průsečík úhlopříček AC, BD a použijeme vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{DA}$, $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{BD}$, $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{SA}$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{SB}$, $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{SC}$, $\boldsymbol{r}_D = \boldsymbol{SD}$ (obr. 5 a obr. 6).

Důkaz (nevektorový) věty o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku: Úsečky SA, SB, SC, SD délky r (kde r je poloměr kružnice k_o) rozdělují tětivový čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři rovnoramenné trojúhelníky ABS, BCS, CDS, DAS (obr. 5), v nichž označíme $\varphi_1 = |\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$,

$\omega_1 = |\sphericalangle ASB|$, $\varphi_2 = |\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB|$, $\omega_2 = |\sphericalangle BSC|$, $\varphi_3 = |\sphericalangle SCD| = |\sphericalangle SDC|$, $\omega_3 = |\sphericalangle CSD|$, $\varphi_4 = |\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle SAD|$, $\omega_4 = |\sphericalangle DSA|$, a tedy $\omega_1 = 180° - 2\varphi_1$, $\omega_1 = 180° - 2\varphi_1$, $\omega_3 = 180° - 2\varphi_3$, $\omega_4 = 180° - 2\varphi_4$. Pro velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníků platí rovnosti $\alpha = \varphi_1 + \varphi_4$, $\beta = \varphi_1 + \varphi_2$, $\gamma = \varphi_2 + \varphi_3$, $\delta = \varphi_3 + \varphi_4$. Protože je $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 360°$, a tedy $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = 180°$, platí pro součty velikostí protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku rovnosti: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180°$.



Obr. 5



Obr. 6

Vektorový důkaz Ptolemaiovy věty: Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ rozděluje úhlopříčka AC na dva trojúhelníky ABC, ACD a obdobně úhlopříčka BD jej rozděluje na dva trojúhelníky BCD, ABD (obr. 6). Z první dvojice příslušných vektorových trojúhelníků ABC, ACD vyplývají pro vektor $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{AC}$ dvě součtové rovnosti $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{u}_1 = -(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})$. Po jejich umocnění dostáváme

$$\boldsymbol{u}_1^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

čili $u_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180° - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ a obdobně

$$\boldsymbol{u}_1^2 = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})^2 = \boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{d}^2 + 2\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}$$

čili $u_1^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos(180° - \delta) = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$, neboť s užitím rovnosti (16) je $\cos(180° - \delta) = \cos\beta$. Ze získaných dvou rovností pro u_1^2

dostáváme eliminací $\cos\beta$ po algebraických úpravách rovnost

$$u_1^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Z druhé dvojice vektorových trojúhelníků BCD, ABD vyplývají pro vektor $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{BD}$ dvě součtové rovnosti $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{u}_2 = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d})$. Odtud obdobným postupem (s využitím toho, že $\cos(180° - \gamma) = \cos\alpha$) odvodíme rovnost

$$u_2^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc},$$

takže $u_1^2 u_2^2 = (ac+bd)^2$, odkud plyne rovnost (17).

Poznámka 5. Původ formulace a názvu Ptolemaiovy věty: Význačný řecký učenec, geograf, astronom a matematik *Klaudios Ptolemaios* (asi 85 n. l. – asi 165 n. l.) v rozsáhlém třináctisvazkovém astronomickém encyklopedickém díle v latinském překladu nazvaném *Almagest* (viz [3, s. 10, s. 23]), shrnuje též vhodný matematický aparát. V něm jako ve vůbec nejstarším dochovaném díle je formulována i dokazována matematická věta, jež se od té doby nazývá *Ptolemaiova věta*. Důkaz v Almagestu je založený na užití podobnosti trojúhelníků a s různými jeho modifikacemi se v literatuře setkáváme nejčastěji (viz např. [13]). Alternativní důkaz vychází z užití kosinové věty (viz [14, s. 264]) a jeho vektorovou variantu jsme použili v příkladu 8. Z obdobného důvodu jako u věty o rovnoběžníku (viz poznámku 4) je také Ptolemaiova věta považována za zobecnění Pythagorovy věty.

Příklad 9

Dokažte, že k oběma větám z příkladu 8 platí i věty obrácené.

Obrácená věta o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku: Jestliže v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ obě dvojice protějších vnitřních úhlů jsou úhly výplňkové, tj. pro velikosti protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku platí rovnosti (16), pak je tento čtyřúhelník tětivový.

Obrácená Ptolemaiova věta: Jestliže v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro délky úhlopříček a délky protějších stran platí rovnost (17), pak je tento čtyřúhelník tětivový.

Důkazy. Uvedeme stručně jen jejich možné postupy.

Důkaz obrácené věty o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku lze snadno provést jako *důkaz sporem*: Předpokládáme, že dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$

neplatí čili je pravdivá její negace, tj. konjunkce výroků p: pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou splněny rovnosti (16) a $\neg q$: čtyřúhelník $ABCD$ není tětivový. Sestrojíme-li tedy kružnici k_o opsanou trojúhelníku ABC, pak (v důsledku platnosti výroku $\neg q$) na této kružnici k_o neleží vrchol D čtyřúhelníku $ABCD$. Pro jeho vnitřní úhel při vrcholu D proto platí, že buď $\delta > 180° - \beta$, nebo $\delta < 180° - \beta$. A to je ve *sporu* s předpokladem p: $\delta = 180° - \beta$. Takže neplatí $\neg(p \Rightarrow q)$, tj. platí dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$.

Přímý důkaz obrácené Ptolemaiovy věty můžeme provést ověřením obráceného postupu důkazu vektorovou metodou v příkladu 8. Je možné ovšem též opět použít *důkaz sporem*: Předpokládáme platnost negace dokazované implikace $p \Rightarrow q$, tj. pravdivost konjunkce výroků p: v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnost (17) a $\neg q$: čtyřúhelník $ABCD$ není tětivový. Na kružnici k_o opsané trojúhelníku ABC tedy neleží vrchol D čtyřúhelníku $ABCD$. Dále lze použít *metodu souřadnicového vyjádření vektorů* ve vhodně zvolené soustavě kartézských souřadnic. Stanovíme v ní rovnici kružnice k_o, kterou splňují souřadnice bodů A, B, C, zatímco pro souřadnice bodu D neplatí. Z těchto podmínek pak (po složitějších algebraických úpravách) dospíváme k tomu, že pro čtyřúhelník $ABCD$ platí nerovnost $u_1u_2 < ac + bd$, což je *spor* s předpokladem p, že v něm platí rovnost (17).

4. Důkazy vět o úhlech tětiv v kružnici s užitím vektorů

Příklad 10

Použitím geometrických vektorů dokažte, že pro libovolnou kružnici platí *Thaletova věta*: Všechny obvodové úhly kružnice k nad jejím průměrem AB (tj. úhly AVB, jejichž vrchol V leží na kružnici k a jejich ramena prochází body A, B) jsou pravé úhly ($|\sphericalangle AVB| = 90°$).

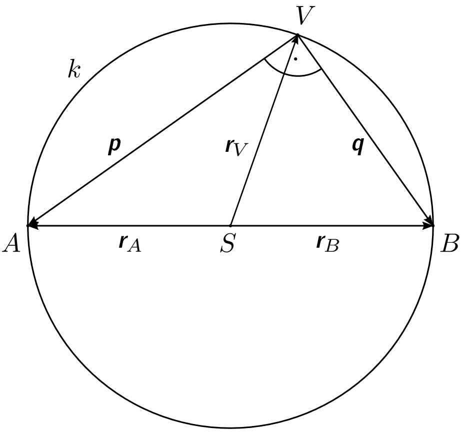
Důkaz. Označme S střed kružnice k a r její poloměr. Pro daný průměr AB a libovolně zvolený obvodový úhel AVB k nim přiřadíme vektory $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{SA}$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{SB} = -\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_V = \boldsymbol{SV}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{VA}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{VB}$ (obr. 7). Protože je $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_V$ a $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_V = -(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_V)$,

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{r}_V - \boldsymbol{r}_A) \cdot (\boldsymbol{r}_V + \boldsymbol{r}_A) = \boldsymbol{r}_V^2 - \boldsymbol{r}_A^2 = r^2 - r^2$$

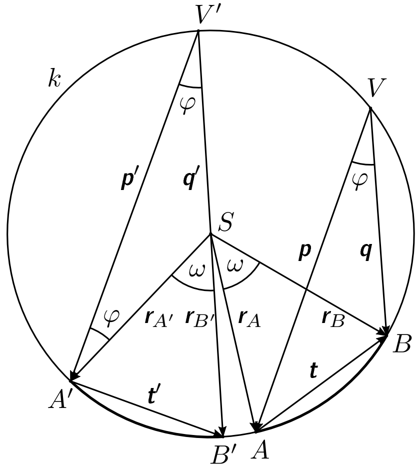
(neboť $|\boldsymbol{r}_V| = |\boldsymbol{r}_A| = r$), a tedy $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{q}$, tj. $|\sphericalangle AVB| = 90°$.

Postup důkazu v příkladu 10 lze obrátit a tím dokázat, že platí též *obrácená Thaletova věta*: Pro každý (libovolně zvolený) pravý úhel AVB

s vrcholem V ($|\sphericalangle AVB| = 90^\circ$) a kružnici k o průměru AB je tento úhel AVB obvodovým úhlem kružnice k nad průměrem AB.



Obr. 7



Obr. 8

Příklad 11

Dokažte, že pro libovolnou kružnici k obecně platí *věta o obvodových a středových úhlech*: Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku AB kružnice k jsou shodné, přičemž jejich velikost φ je rovna polovině velikosti ω středového úhlu příslušného oblouku AB, tj. platí pro ně rovnost

$$\omega = 2\varphi. \tag{18}$$

Důkaz. Na kružnici k se středem S a poloměrem r zvolme tětivu AB a označme $\overset{\frown}{AB}$ příslušný menší oblouk kružnice, pro který budeme důkaz provádět. (Pro větší oblouk AB kružnice k by byl důkaz analogický.) Nad $\overset{\frown}{AB}$ sestrojíme libovolný obvodový úhel AVB a jeho velikost označme $\omega = |\sphericalangle AVB|$. K tětivě VB veďme středem S rovnoběžnou tětivu $V'B'$ a k tětivě VA rovnoběžnou tětivu $V'A'$ (obr. 8). Tětivám AB a $A'B'$ přiřadíme vektory $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{A'B'}$, pro něž platí, že $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ a $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}_{B'} - \boldsymbol{r}_{A'}$, kde $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{SA}$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{SB}$, $\boldsymbol{r}_{A'} = \boldsymbol{SA'}$, $\boldsymbol{r}_{B'} = \boldsymbol{SB'}$ a $|\boldsymbol{t}'| = |\boldsymbol{A'B'}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{t}|$. Stejně tak jsou si rovny délky příslušných oblouků $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{AB}$, protože $\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{VV'}$, $|\overset{\frown}{AB}| = |\overset{\frown}{AA'}| - |\overset{\frown}{B'A}|$

a $|\widehat{AB}| = |\widehat{BB'}| - |\widehat{B'A}| \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = |\widehat{AB}|$. Dále si uvědomíme, že dvojice vektorů $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{VA}$ a $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{V'A'}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{VB}$ a $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{V'B'}$ jsou kolineární vektory, neboť je $\boldsymbol{p}' = k_1\boldsymbol{p}$, kde $k_1 = \frac{|V'A'|}{|VA|}$ a $\boldsymbol{q}' = k_2\boldsymbol{q}$, kde $k_2 = \frac{|V'B'|}{|VB|}$. Pro jejich jednotkové vektory $\boldsymbol{p}_0$ a $\boldsymbol{q}_0$ je $\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0 = \cos\varphi$, kde $\varphi = |\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle A'V'B'|$. K obvodovým úhlům AVB a $A'V'B'$ o téže velikosti φ příslušné středové úhly ASB a $A'S'B'$ jsou shodné, tj. mají také stejnou velikost $\omega = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'S'B'|$, což plyne ze shodnosti rovnoramenných trojúhelníků ABS a $A'B'S'$. V rovnoramenném trojúhelníku $A'B'V'$ se velikost vnějšího úhlu ω rovná součtu velikosti φ dvou protějších vnitřních úhlů, tj. $\omega = 2\varphi$.

V uvedeném důkazu byly použity geometrické vektory jen v pomocné roli. Ryze vektorový důkaz lze provést tak, že se (užitím souřadnic vektorů) dokáže platnost vektorové rovnosti

$$\frac{\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_B}{r^2} = 2(\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{q}_0)^2 - 1 \Rightarrow \cos\omega = 2\cos^2\varphi - 1 = \cos 2\varphi \Rightarrow \omega = 2\varphi.$$

Příklad 12

Před vektorovým důkazem v následujícím příkladu připomeňme důkazy ze syntetické geometrie, že pro velikosti úhlů úhlopříček libovolného konvexního čtyřúhelníku a speciálně tětivového čtyřúhelníku platí věty:

Věta o velikosti úhlů úhlopříček konvexního čtyřúhelníku: V každém konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro úhly mezi úhlopříčkami AC a BD platí, že jejich velikosti φ, resp. $180° - \varphi$ jsou rovny součtu velikostí úhlů sevřených úhlopříčkami AC, BD a jednou z protějších stran AD, BC, resp. AB, CD.

Věta o velikosti úhlů úhlopříček tětivového čtyřúhelníku: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ pro velikosti úhlů mezi úhlopříčkami AC a BD platí

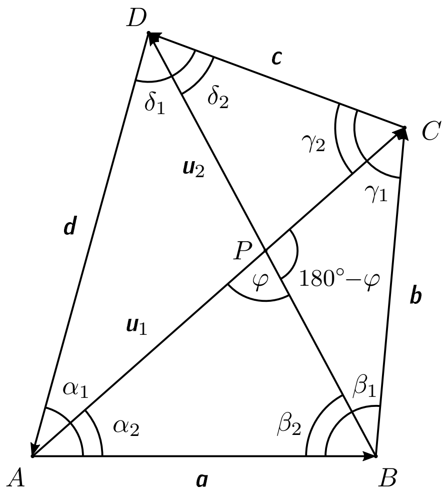
$$\varphi = \varphi_{AB} + \varphi_{CD} = \frac{1}{2}(\omega_{AB} + \omega_{CD}), \tag{19}$$

$$180° - \varphi = \varphi_{BC} + \varphi_{DA} = \frac{1}{2}(\omega_{BC} + \omega_{DA}), \tag{20}$$

kde φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{CD}, φ_{DA} jsou velikosti obvodových úhlů a ω_{AB}, ω_{BC}, ω_{CD}, ω_{DA} velikosti příslušných středových úhlů pro oblouky AB, BC, CD, DA kružnice k_o opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$.

Důkazy. Důkaz věty o velikosti úhlů úhlopříček konvexního čtyřúhelníku: Označíme-li velikosti úhlů sevřených úhlopříčkami AC, BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a jeho stranami α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 (obr. 9), pak velikosti úhlů úhlopříček φ, resp. $180° - \varphi$ můžeme určit na základě vztahů mezi velikostmi vnějších úhlů trojúhelníku a velikostmi jeho protějších vnitřních úhlů. Tak z $\triangle APD$ plyne, že $\varphi = \alpha_1 + \delta_1$ a z $\triangle BPC$, že $\varphi = \beta_1 + \gamma_1$. Obdobně z $\triangle APB$ dostáváme, že $180° - \varphi = \alpha_2 + \beta_2$ a z $\triangle CPD$, že $180° - \varphi = \gamma_2 + \delta_2$.

Důkaz věty o velikosti úhlů úhlopříček tětivového čtyřúhelníku: Speciálně pro tětivový čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 6) je $\gamma_1 = \delta_1 = \varphi_{AB}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{AB}$) a $\alpha_1 = \beta_1 = \varphi_{CD}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{CD}$), odkud z výše odvozených vztahů pro φ vyplývají rovnosti (19). Obdobně máme $\alpha_2 = \delta_2 = \varphi_{BC}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{BC}$) a $\beta_2 = \gamma_2 = \varphi_{DA}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{DA}$), odkud z výše odvozených vztahů pro $180° - \varphi$ dostáváme rovnosti (20).



Obr. 9

Příklad 13

Užitím geometrických vektorů dokažte, že pro úhel φ úhlopříček tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ platí vzorec

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2(ac + bd)}, \tag{21}$$

kde a, b, c, d jsou délky stran tětivového čtyřúhelníku.

Důkaz. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 9) pro vektory $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{BD}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{DA}$, platí $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} \Rightarrow \boldsymbol{d} = -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, takže

$$d^2 = \boldsymbol{d}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Proto

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + b^2 = \\ = b^2 + \frac{1}{2}(d^2 - a^2 - b^2 - c^2) = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2).$$

Odtud a ze vztahu $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = u_1 u_2 \cos\varphi$ plyne, že v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí pro úhel úhlopříček φ vztah

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2u_1u_2} \tag{22}$$

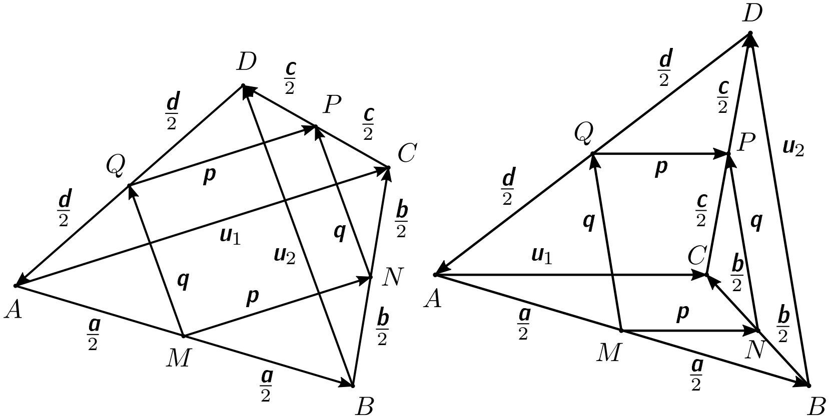
a speciálně pro tětivový čtyřúhelník, v němž podle rovnosti (17) z Ptolemaiovy věty je $u_1u_2 = ac + bd$, plyne vzorec (21).

5. Důkaz Varignonovy věty pro čtyřúhelník pomocí vektorů

Příklad 14

Dokažte, že pro libovolný konvexní i nekonvexní čtyřúhelník platí *Varignonova věta pro čtyřúhelník*: Středy stran každého čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.

Důkaz. V libovolně zvoleném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 10a), resp. nekonvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 10b) středy stran AB, BC, CD, DA označíme po řadě M, N, P, Q. Pro délky jeho stran $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ tedy platí, že $\frac{a}{2} = |AM| = |MB|$, $\frac{b}{2} = |BN| = |NC|$, $\frac{c}{2} = |CP| = |PD|$, $\frac{d}{2} = |DQ| = |QA|$. K důkazu použijeme vektory stran $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{DA}$, přičemž $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$ a vektory úhlopříček $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{BD}$, tj. $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Pro vektory $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{MN}$, $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{QP}$ pak platí rovnosti $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{MN} = \boldsymbol{MB} + \boldsymbol{BN} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{DP} + \boldsymbol{QD} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1$, takže $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}$, a tedy orientované úsečky $\boldsymbol{MN}$ a $\boldsymbol{QP}$ jsou dvě umístění téhož vektoru $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1$. (Obdobně lze dokázat, že orientované úsečky $\boldsymbol{MQ}$ a $\boldsymbol{NP}$ jsou dvěma umístěními téhož vektoru $\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2$.) Odtud plyne, že čtyřúhelník $MNPQ$ je rovnoběžník, přičemž $|MN| = \frac{1}{2}u_1$ a $|NP| = \frac{1}{2}u_2$.



a) b)

Obr. 10

Poznámka 6. Původ názvu a formulace Varignonovy věty pro čtyřúhelník: Jejím objevitelem byl francouzský mechanik a matematik *Pierre Varignon* (1654–1722), který ji formuloval a dokázal v knižní publikaci Elemens de Mathematique, jež byla vydána až posmrtně v roce 1731. Vzhledem k jednoduchosti a názornosti této věty eukleidovské geometrie je skutečně pozoruhodné, že byla objevena a publikována až na začátku 18. století. Rovnoběžník $MNPQ$ z této věty je nazýván *Varignonův rovnoběžník* a lze snadno dokázat, že jeho obsah je roven polovině obsahu příslušného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, tj. $S(MNPQ) = \frac{1}{2}S(ABCD)$. (Pro nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$, popř. i tzv. „zkřížený čtyřúhelník“, v němž též platí Varignonova věta, situace s obsahy je složitější. Aby pro ně platila stejná rovnost obsahů jako pro konvexní čtyřúhelníky je nutná doplňková úmluva o zobecnění pojmu obsahu, jež přesahuje rámec školské geometrie.) V literatuře se lze také setkat s různými *zobecněními Varignonovy věty* pro některé další mnohoúhelníky (se sudým počtem stran a rovnoběžnými protějšími stranami).

6. Závěr

Použití geometrických vektorů v důkazech planimetrických vět jsme ilustrovali na příkladech významných jednoduchých vět. Další a složitější příklady může čtenář též nalézt např. v [1, s. 356–361], [4] a [5]. Řešení geometrických problémů vektorovou metodou přispívá k hlubšímu porozumění geometrii, je užitečné a inspirativní jak ve výuce, tak při práci s talentovanými studenty v matematice.

Literatura

[1] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.

[2] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část. Obecná didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.

[3] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. III. část. Historie matematiky pro učitele. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.

[4] *Larson, L. C.*: Problem-Solving Through Problems. Springer Verlag, New York – Berlin 1983, (slovenský překlad: Metódy riešenia matematických problémov. Alfa, Bratislava, 1990).

[5] *Švrček, J.*: Užití vektorů při řešení geometrických úloh. In: Sborník „Makos 2010“, vydavatelství PedF UK, Praha, 2011, s. 40–45.

[6] *Budinský, B., Šmakal, S.*: Vektory v geometrii. Škola mladých matematiků sv. 28. ÚV MO, nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1971.

[7] *Gusev, V. A., Koljagin, J. M., Lukankin, G. L.*: Vektory v školnom kurse geometrii. Prosveščenije, Moskva, 1976.

[8] *Prasolov, V. V.*: Zadači po planimetrii. Časť I. Nauka, Moskva, 1986.

[9] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1990.

[10] *Dlab, V.*: Důkladné porozumění elementární matematice. Učitel matematiky, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

[11] *Švrček, J., Juklová, L.*: Důkazy a důkazové úlohy v planimetrii. MFI, roč. 28 (2019), č. 2, s. 92–101.

[12] *Dlab, V.*: Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty. RMF, roč. 94 (2019), č. 4, s. 8–15.

[13] *Leischner, P.*: Ptolemaiova věta. MFI, roč. 15 (2005/2006), č. 3, s. 129–135.

[14] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách II. Dotisk 2. upraveného vydání, Prometheus, Praha, 2016.