Egyptské násobení

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na základní škole se žáci učí násobilku. Násobit dvě přirozená čísla a, b není samozřejmě nic jiného, než b-krát sečíst číslo a samo se sebou. Jelikož pro $b = 1$ sčítání vlastně neprovádíme, k provedení výpočtu tohoto součinu je zapotřebí právě $b - 1$ součtů. Takové postupné sčítání je však časově dosti náročné, i když početně jednodušší než násobení. Proto pro $a \leq 9$, $b \leq 9$ je při praktickém počítání bez kalkulátoru snadnější a rychlejší znát násobilku, než postupně sčítat číslo a. Násobíme-li však čísla větších řádů, používáme zpravidla algoritmus, který žákům zpočátku působí obtíže, a při kterém se bez znalosti násobilky neobejdeme. Ano, je to známé násobení „s ocáskem“.

Nabízí se však otázka, zda lze i pro násobení větších přirozených čísel používat postupné sčítání, ale tak, aby počet těchto součtů byl pro daná čísla a, b podstatně menší než počet $b - 1$ součtů čísla a. Taková metoda skutečně existuje, zpravidla se nazývá „egyptské násobení“. Nejjednodušší vysvětlení této metody lze provést pomocí příkladu.

Chceme například násobit čísla $a = 48$, $b = 23$. Pokud bychom používali postupné sčítání, museli bychom 23 krát sečíst číslo 48, což je dosti pracné a zdlouhavé. Tzv. „egyptský algoritmus“ pracuje efektivněji. Sčítáme takto:

$$\begin{aligned} 48 &= & 48 &= 48 \cdot \underline{1}, \\ 96 &= & 48 + 48 &= 48 \cdot \underline{2}, \\ 192 &= & 96 + 96 &= 48 \cdot \underline{4}, \\ 384 &= & 192 + 192 &= 48 \cdot 8, \\ 768 &= & 384 + 384 &= 48 \cdot \underline{16}. \end{aligned}$$

Nyní si všimněme, že $23 = 1 + 2 + 4 + 16$ (tj. podtržená čísla v pravém sloupci), což je vyjádření čísla 23 v mocninách 2 nejvýše rovných 23, a tedy

$$48 \cdot 23 = 48 + 96 + 192 + 768 = \mathbf{1104}.$$

Nemuseli jsme tedy sčítat 23krát číslo 48, ale sčítali jsme nejprve 4 dílčí součty, a pak jsme tyto součty sečetli, dohromady jsme provedli 8 sčítání, takže tento algoritmus je mnohem efektivnější. Pro běžné násobení bez kalkulátoru se to jeví jako výhoda, při značném množství násobení skutečně velkých čísel je tento rozdíl zcela markantní. A to je důvod, proč se toto egyptské násobení používá v počítačích, kde úspora času hraje rozhodující roli zejména v rozsáhlých algoritmech.

Otázka je, kolik součtů čísla a musíme vytvořit při zadaném čísle b. Odpověď je zajímavá, je to maximálně sedminásobek počtu číslic desítkového zápisu čísla b. Ve výše uvedeném příkladu má číslo $b = 23$ dvě číslice, tedy maximálně potřebujeme vypočítat 14 součtů. Tento odhad je velmi velkorysý, přesvědčili jsme se, že stačilo celkem 8 součtů. Avšak mohou nastat situace, kdy tento odhad bude blíže ke skutečnosti.

A jak vysvětlíme, že stačí nejvýše sedminásobek počtu číslic čísla b v desítkovém zápisu? Důkaz je následující. Zřejmě platí

$$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = \sqrt{128} > \sqrt{100} = 10,$$

a tedy

$$2^{\frac{7}{2}n} > 10^n$$

pro každé přirozené číslo n. Jinými slovy, číslo $2^{\frac{7}{2}n}$ je větší než počet číslic čísla b. Tedy nejvyšší mocnina čísla 2, která není větší než b, musí mít méně než 3,5krát počet cifer čísla b. Protože pak ještě sčítáme tyto dílčí součty, je počet součtů v egyptském násobení maximálně dvojnásobkem tohoto čísla 3,5, tedy jeho sedminásobkem.

Čtenář nechť si ověří na příkladu násobení velkých čísel, jak podstatná úspora počtu sčítání takto nastává. A pro žáky základní školy perlička na závěr: při této metodě jsme zcela vynechali znalost a používání násobilky,

Literatura

[1] *Simonsos, S.*: Rediscovering Mathematics. MAA Press, Amer. Mathem. Society, Classroom Resource Materials, Vol. 61, 2011.