Tři speciální body ležící na jedné přímce I

JAROSLAV ZHOUF

Vysoká škola ekonomická, Praha

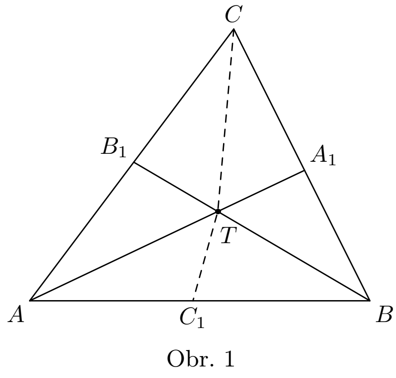
Úkolem tohoto a následujících článků je poukázat na některé významné trojice bodů v rovině, které leží na jedné přímce. Takovou trojicí bodů v trojúhelníku je např. jeho vrchol, střed jeho protilehlé strany a jeho těžiště – tyto body leží na těžnici trojúhelníku. Jinou trojicí bodů v trojúhelníku je jeho vrchol, pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protilehlou stranu a průsečík výšek – tyto body leží na výšce trojúhelníku.

V tomto článku začneme právě uvedenými případy. Tuto znalost pak využijeme dále, kdy budeme ukazovat další trojice takových bodů. Celá problematika bude řešena tak, aby jí porozuměli středoškoláci a snad i mnozí žáci druhého stupně základní školy.

Vrchol trojúhelníku, střed jeho protější strany a těžiště

Máme dán trojúhelník ABC a A_1, B_1, C_1 středy protilehlých stran k jeho vrcholům. Označme T (těžiště) průsečík přímek (těžnic) AA_1 a BB_1. Dokážeme, že pak body C, T, C_1 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Důkazů tohoto tvrzení je více, zde uvedeme méně obvyklý způsob důkazu. Budeme předpokládat, že bod T neleží na přímce CC_1 (obr. 1).



Obr. 1

Jelikož je $A_1B_1 \parallel AB$, jsou obsahy trojúhelníků ABA_1 a ABB_1 stejné. Odečteme-li od těchto stejných hodnot obsah trojúhelníku ABT, dostaneme, že obsahy trojúhelníků ATB_1 a BTA_1 jsou stejné.

Stejné jsou obsahy trojúhelníků AC_1T a C_1BT, protože $|AC_1| = |C_1B|$. Stejně tak jsou stejné obsahy trojúhelníků AB_1T a CB_1T a také jsou stejné obsahy trojúhelníků BA_1T a CA_1T. Proto se součet obsahů trojúhelníků AC_1T, AB_1T, CB_1T rovná součtu obsahů trojúhelníků BC_1T, BA_1T, CA_1T.

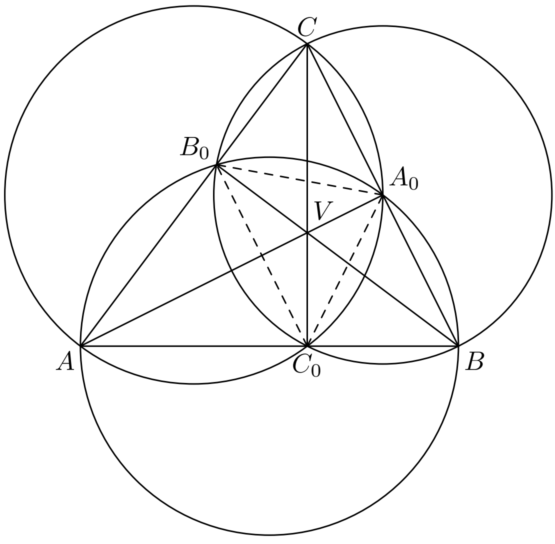
Jelikož jsou taktéž stejné obsahy trojúhelníků AC_1C a BC_1C, vyplývá z toho jedině, že bod T leží na přímce C_1C.

Vrchol trojúhelníku, pata výšky na protější straně a ortocentrum

Máme dán trojúhelník ABC a A_0, B_0, C_0 paty kolmic vedených postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany. Označme V (ortocentrum, průsečík výšek) průsečík přímek (výšek) AA_0 a BB_0. Dokážeme, že pak body C, V, C_0 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny výšky trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Důkazů tohoto tvrzení je taktéž více. Zde ukážeme jeden možný důkaz, a to jen pro ostroúhlý trojúhelník.

Sestrojíme tři přímky AA_0, BB_0, CC_0 (obr. 2).



Obr. 2

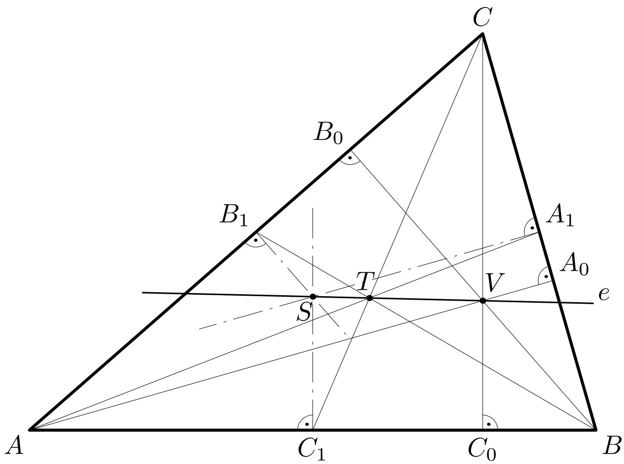
Body A, B, A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Proto jsou obvodové úhly BAA_0 a BB_0A_0 shodné. Body B, C, B_0, C_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem BC. Proto jsou obvodové úhly BCC_0 a BB_0C_0 shodné. Body A, C_0, A_0, C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Proto jsou obvodové úhly C_0AA_0 a C_0CA_0 shodné. Odsud vyplývá, že BB_0 je osou úhlu $C_0B_0A_0$.

Analogicky je AA_0 osou úhlu $C_0A_0B_0$. A analogicky je CC_0 osou úhlu $A_0C_0B_0$.

Průsečík přímek AA_0 a BB_0 je bod V. Tento bod má stejnou vzdálenost od přímek C_0B_0, A_0B_0 a C_0A_0. Proto bod V leží na přímce CC_0.

Těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané

Využijme označení bodů v trojúhelníku ABC z předchozích kapitol. Nově označme S střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Je to bod, ve kterém se protínají osy stran, které zde procházejí body A_1, B_1, C_1 (obr. 3).



Obr. 3

Osy stran trojúhelníku ABC jsou v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jeho výškami s ortocentrem S. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je obrazem trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Proto je i bod S obrazem bodu V v této stejnolehlosti.

Takže body S, T, V leží na jedné přímce. A platí $|TV| = 2 \cdot |TS|$. Tato přímka se nazývá *Eulerova přímka*, často ji značíme e. Eulerova přímka existuje pro každý trojúhelník vyjma trojúhelníku rovnostranného, kde body S, T, V splývají.

Poznámky.

1. Obecně neplatí pro každý trojúhelník, že na Eulerově přímce leží i střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku.
2. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ se nazývá *příčkový trojúhelník* trojúhelníku ABC.
3. Trojúhelník $A_0B_0C_0$ se nazývá *ortický trojúhelník* trojúhelníku ABC.
4. Bod L ležící na Eulerově přímce, který je středově souměrný s bodem V podle bodu S, se nazývá *Longchampův bod.*

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Ověřte, že v pravoúhlém trojúhelníku s jedním ostrým úhlem o velikosti $60°$ neleží střed kružnice vepsané na Eulerově přímce.

Úloha 2

Jsou dány soustředné kružnice k, l se středem S, l leží vně k. Na kružnici l je dán bod B, z něhož jsou vedeny tečny kružnice k s body dotyku T_1, T_2. Označme P průsečík kružnice k a úsečky BS. Přímky ST_1, ST_2 protínají kružnici l v bodech U_1, U_2. Dokažte, že body U_1, U_2, P leží na jedné přímce.

Úloha 3

Dokažte pro tupoúhlý trojúhelník ABC s patami A_0, B_0, C_0 kolmic vedenými postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany a ortocentrem V, že body C, V, C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 4 (Obměna Nagelovy věty.)

Označme v trojúhelníku ABC paty A_0, B_0, C_0 kolmic vedených postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany, střed S kružnice trojúhelníku opsané a patu P kolmice z vrcholu A na přímku B_0C_0. Dokažte, že body A, P, S leží na jedné přímce.

Úloha 5

Je dán trojúhelník ABC. Sestrojíme rovnoběžníky $ABCP$ a $ABQC$. Dokažte, že body P, C, Q leží na jedné přímce.

Úloha 6

Dokažte, že prochází-li Eulerova přímka trojúhelníku některým jeho vrcholem, je trojúhelník pravoúhlý nebo rovnoramenný.

Úloha 7

Dokažte, že Longchampův bod trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku $A'B'C'$, jehož příčkový trojúhelník je ABC.

Úloha 8

Dokažte, že jsou totožné Eulerovy přímky trojúhelníku ABC a trojúhelníku $A'B'C'$, jehož příčkový trojúhelník je ABC.

Úloha 9

Mají-li dvě kružnice o nestejných poloměrech společnou tečnu, pak tato tečna prochází středem některé stejnolehlosti zobrazující jednu kružnici na druhou. Dokažte.

Úloha 10

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán vrchol C, průsečík výšek V a střed S kružnice opsané.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a jejím středem C_1 je Eulerova přímka CC_1. Je-li $|\sphericalangle BAC| = 60°$, je trojúhelník AC_1C rovnostranný. Takže Eulerova přímka svírá s přímkou AC úhel o velikosti $60°$, kdežto střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na přímce, která svírá s přímkou AC úhel o velikosti $45°$.

Úloha 2: Trojúhelníky SBT_1 a SU_1P jsou shodné, protože $|SB| = |SU_1|$, $|ST_1| = |SP|$, $|\sphericalangle BST_1| = |\sphericalangle U_1SP|$. Proto je $|\sphericalangle SPU_1| = |\sphericalangle SPU_2| = |\sphericalangle ST_1B| = 90°$.

Úloha 3: Vyberme například situaci, kdy trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu B. Výšky z bodů A, B mají průsečík V. Ortocentrum trojúhelníku AVC je bod B. V tomto trojúhelníku je přímka AB výška s patou C_0. Proto body C, V, C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 4: Důkaz je naznačen pro ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ a střed strany AB označme C_1. Z důkazu výše již víme, že $|\sphericalangle CC_0B_0| = 90° - \gamma$, takže $|\sphericalangle PC_0A| = \gamma$. Stejně tak pro středový úhel platí $|\sphericalangle C_1SA| = \gamma$. Proto jsou trojúhelníky SAC_1 a C_0AP podobné se shodným úhlem při vrcholu A, čímž je důkaz hotov.

Úloha 5: Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Potom $|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| = \beta + \gamma + \alpha = 180°$.

Úloha 6: Uvažujme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Může být buď $C = V$, nebo $C \neq V$. V prvním případě je trojúhelník ABC pravoúhlý. Ve druhém případě je přímka CV zároveň výškou i těžnicí trojúhlníku ABC, takže trojúhelník je rovnoramenný.

Úloha 7: Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou stejnolehlé podle středu T, proto se výška AV zobrazí na výšku $A'L$.

Úloha 8: Na Eulerově přímce trojúhelníku ABC leží průsečík výšek L a těžiště T trojúhelníku $A'B'C'$.

Úloha 9: Středy kružnic označme O_1, O_2, body dotyku kružnic se společnou tečnou označme T_1, T_2. Je $O_1T_1 \parallel O_2T_2$, protože jsou obě přímky kolmé ke společné tečně. Proto je obrazem bodu T_1 bod T_2 v nějaké stejnolehlosti zobrazující jednu kružnici na druhou, proto tečna T_1T_2 prochází středem této stejnolehlosti.

Úloha 10: Sestrojíme těžiště T na Eulerově přímce, střed C_1 strany AB, kolmici bodem C_1 k přímce CV a kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

Závěr

Prezentovali jsme všeobecně známá, ale i méně známá tvrzení o přímkách v trojúhelníku, které jsme zde dokázali. Jiné důkazy lze nalézt v mnohé literatuře. Zde uveďme jen jako příklady [1, s. 55–58], [2, s. 38–43], [3, s. 172–173], [4, s. 28–51]. Další důkazy budou obsahem pokračování našeho tématu v následujících číslech tohoto časopisu.

V pokračování tohoto článku také poukážeme na jiné, méně známé trojice bodů ležící na jedné přímce.

Literatura

[1] *Boček, L., Zhouf, J.*: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] *Kadleček, J.*: Geometrie v rovině a prostoru. Prometheus, Praha, 1996.

[3] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.

[4] *Švrček, J., Vanžura J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.