MATEMATIKA

Důkazy v planimetrii užitím komplexních čísel

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

1. Komplexní čísla a jejich geometrický význam

Tímto článkem bezprostředně navazujeme na článek [1] o užití geometrických vektorů v důkazech planimetrických vět. V obdobném pojetí ukážeme, jak můžeme planimetrické věty dokazovat též *metodou užití komplexních čísel*.

Ve středoškolských učebnicích matematiky se s ní zpravidla setkáváme nikoliv v planimetrii, ale pouze jen jako se zajímavou aplikací teorie komplexních čísel pro řešení planimetrických úloh (viz např. [2, s. 198–199] a [3]).

Výhody metody použití komplexních čísel při řešení planimetrických úloh jsou obdobné jako u metody užití geometrických vektorů, přičemž často obě metody spolu úzce souvisejí. Připomeňme též význam použití komplexních čísel v planimetrii z hlediska důkladného porozumění matematice, který zejména vyzdvihuje *Vlastimil Dlab* (viz odkaz v [1] na jeho článek).

Cílem tohoto článku je především *prezentace důkazů* významných planimetrických vět užitím komplexních čísel. Protože navazujeme na důkazy obdobných vět pomocí geometrických vektorů v článku [1], jejich formulace v tomto článku jsou stručnější a nepovažujeme za nutné u nich uvádět obdobné obrázky. Jednotné a co nejjednodušší pojetí důkazů je založeno na *algebře komplexních čísel*, jejíž použité poznatky a označení stručně zrekapitulujeme.

Komplexní čísla (prvky oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$) budeme značit z, z_1, z_2, z_A, z_B apod. Připomeňme (viz [2]–[6]), že *komplexními čísly* (prvky oboru $\mathbb{C}$) se rozumí uspořádané dvojice reálných čísel $z = [x, y]$, $x, y \in \mathbb{R}$ a z praktického hlediska je užitečné jejich vyjádření v *algebraickém tvaru*, v němž $\mathrm{i} = [0, 1] \in \mathbb{C}$ je tzv. *imaginární jednotka*:

$$z = x + y\,\mathrm{i}, \quad \text{kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } \mathrm{i}^2 = [0, 1]^2 = -1. \tag{1}$$

Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *reálná část komplexního čísla* z, značí se $\operatorname{Re} z = x$ a číslo $y \in \mathbb{R}$ se nazývá *imaginární část komplexního čísla* z, značí se $\operatorname{Im} z = y$. Přitom pak číslo $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ se nazývá *komplexně sdružené číslo* ke komplexnímu číslu $z = x + y\,\mathrm{i}$.

V oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ se definují základní operace sčítání a násobení komplexních čísel, přičemž pro *součet komplexních čísel* a *součin komplexních čísel* platí $(z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})$:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \tag{2}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \tag{3}$$

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3, \tag{4}$$

tj. operace sčítání a násobení jsou *komutativní* a *asociativní*, operace násobení vzhledem ke sčítání je *distributivní*.

Operace *odčítání* a *dělení* komplexních čísel jsou definovány jako inverzní operace ke sčítání a násobení:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \qquad \text{pro } z_2 \neq 0\colon\ \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}. \tag{5}$$

Pro *operace s komplexně sdruženými čísly* platí (pro každé $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \tag{6}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \tag{7}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \ (\text{pro } z_2 \neq 0). \tag{8}$$

Absolutní hodnota komplexního čísla z je definována vztahem

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\overline{z}} \Rightarrow |z|^2 = z\overline{z}. \tag{9}$$

Odtud mj. plyne, že ve vzorci (5) pro podíl komplexních čísel z_1, z_2 je $z_2\overline{z_2} = |z_2|^2$. Ze vztahu (9) dále plyne, že pro absolutní hodnoty součtu a rozdílu komplexních čísel z_1, z_2 platí rovnosti

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}), \tag{10}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}). \tag{11}$$

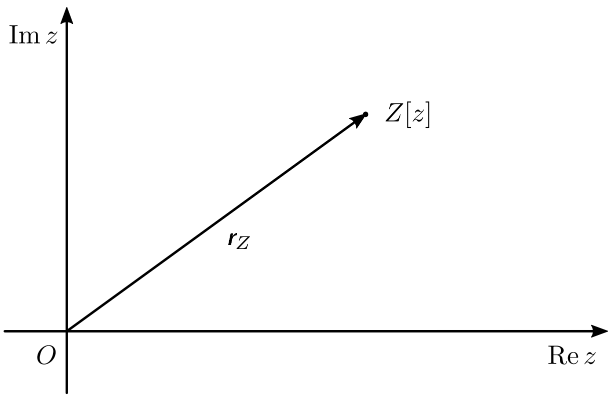
Z nich po sečtení vyplývá rovnost

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \tag{12}$$

Pro absolutní hodnoty součinu a podílu komplexních čísel z_1, z_2 platí rovnosti

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{pro}\, z_2 \neq 0. \tag{13}$$

Zejména dále využijeme *geometrickou interpretaci komplexních čísel a operací s nimi v Gaussově rovině*, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem $O[0,0]$ a osami $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. Každému komplexnímu číslu $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ je přiřazen vzájemně jednoznačně bod $Z[x, y]$ Gaussovy roviny $\mathbb{G}$ a říkáme, že číslo z je *komplexní souřadnicí* bodu $Z \in \mathbb{G}$ (obr. 1). Bod Z se nazývá *obraz čísla* z v $\mathbb{G}$ a přiřazuje se mu též (vzájemně jednoznačně) *průvodič (rádiusvektor)* bodu Z označovaný $\boldsymbol{r}_Z = \boldsymbol{OZ}$, tj. *vázaný vektor* reprezentovaný orientovanou úsečkou, jejíž počáteční bod O je počátek Gaussovy roviny $\mathbb{G}$ a jejíž koncový bod je bod Z.



Obr. 1

Geometrické zobrazení komplexních čísel se speciálně uplatňuje při geometrické konstrukci součtu a rozdílu komplexních čísel pomocí *vektorového rovnoběžníku*, resp. *vektorového trojúhelníku*. Názornou geometrickou interpretaci mají též absolutní hodnoty komplexního čísla z a rozdílu dvou různých komplexních čísel z_1, z_2: $|z| = |\boldsymbol{r}_Z| = |\boldsymbol{OZ}| = |OZ|$ představuje vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku O a $|z_1 - z_2| = |Z_1 Z_2|$ vzdálenost obrazů komplexních čísel z_1, z_2.

V úzké návaznosti na geometrická zobrazení komplexních čísel se zavádí jejich tzv. *goniometrický tvar komplexního čísla* $z \neq 0$, který je definován vzorcem

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi), \tag{14}$$

kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla z a φ je velikost orientovaného úhlu $\widehat{XOZ}$ sevřeného kladnou poloosou OX osy $x = \operatorname{Re} z$ a polopřímkou OZ nazývaná *argument komplexního čísla* z. Jeho hlavní (základní) hodnoty jsou v intervalu $0 \le \varphi < 2\pi$ (resp. $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$) a značíme je $\arg z = \varphi$. Ve vzorci (14) $\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$ je *komplexní jednotka* ($|\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$).

Pro součin a podíl nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$ vyplývá ze vzorce (14) a ze součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus, že platí

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{15}$$

přičemž

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{16}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{17}$$

přičemž

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{18}$$

V aplikacích, mj. v geometrii je často výhodně používán alternativní *exponenciální tvar komplexního čísla* $z \neq 0$, v němž základem je *Eulerovo číslo* e (tj. iracionální číslo $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$):

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \text{kde } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,\ \varphi = \arg z. \tag{19}$$

Jeho použitím nabývají vzorce pro součin a podíl nenulových komplexních čísel z_1, z_2 (15), (17) jednoduchá vyjádření:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{20}$$

Užitím goniometrického, resp. exponenciálního, tvaru nenulových komplexních čísel

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| \, (\cos\varphi_1 + \mathrm{i} \, \sin\varphi_1), \quad \text{resp. } z_1 = |z_1| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_1}, \\ z_2 &= |z_2| \, (\cos\varphi_2 + \mathrm{i} \, \sin\varphi_2), \quad \text{resp. } z_2 = |z_2| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \end{aligned}$$

lze též dokázat užitečné rovnosti pro výrazy $z_1\overline{z_2}$ a $\overline{z_1}z_2$:

$$\begin{gathered} z_1\overline{z_2} = |z_1| \cdot |z_2| \, [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \, , \\ \text{resp. } z_1\overline{z_2} = |z_1| \cdot |z_2| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}, \\ \overline{z_1}z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \, [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \mathrm{i} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)] \, , \\ \text{resp. } \overline{z_1}z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_2-\varphi_1)}. \end{gathered}$$

Odtud získáváme rovnosti pro výrazy $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$ ve vzorcích (10), (11):

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1| \cdot |z_2| \, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{21}$$

Též užijeme zajímavou rovnost, jež platí pro každá čtyři komplexní čísla z_1, z_2, z_3, z_4:

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4). \tag{22}$$

2. Důkazy planimetrických vět užitím komplexních čísel

Příklad 1 Pomocí komplexních souřadnic vrcholů obecného trojúhelníku ABC v Gaussově rovině $\mathbb{G}$ dokažte pro něj *kosinovou větu* vyjádřenou vzorcem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{23}$$

a speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC *Pythagorovu větu* vyjádřenou vzorcem $c^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz. Nechť vrcholy A, B, C trojúhelníku ABC [1, obr. 2] jsou obrazy komplexních čísel z_A, z_B, z_C v Gaussově rovině (tj. tato komplexní čísla jsou komplexními souřadnicemi bodů A, B, C). Užitím vzorce (11) vyjádříme

$$|z_A - z_B|^2 = |z_A|^2 + |z_B|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_A\overline{z_B}),$$

přičemž podle vzorce (21) je

$$\mathrm{Re}(z_A\overline{z_B}) = |z_A| \cdot |z_B|\, \cos(\varphi_A - \varphi_B) = |z_A| \cdot |z_B|\, \cos(\varphi_B - \varphi_A),$$

kde $|z_A|$, $|z_B|$ jsou absolutní hodnoty komplexních čísel z_A, z_B, $\varphi_A = \arg z_B$, $\varphi_B = \arg z_B$ jsou základní (hlavní) hodnoty jejich argumentů. Zvolíme-li (bez újmy na obecnosti) $z_C = 0$ čili vrchol C v počátku O Gaussovy roviny, pak $\varphi_B - \varphi_A = |\sphericalangle \boldsymbol{r}_B, \boldsymbol{r}_A| = \gamma$ a po dosazení dostáváme $|z_A - z_B|^2 = |z_B|^2 + |z_A|^2 - 2\cos\gamma$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cos\gamma$, tj. vzorec (23) kosinové věty pro c^2. (Její obdobná vyjádření pro a^2, b^2 lze získat využitím cyklické záměny proměnných a, b, c.)

Speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC, kde $\gamma = 90°$, a tedy $\cos\gamma = 0$, plyne odtud vzorec: $c^2 = a^2 + b^2$, který vyjadřuje *Pythagorovu větu*. Obrácením postupu (implikací) důkazu vyplývá též platnost *obrácené Pythagorovy věty.*

Příklad 2 Užitím geometrické interpretace komplexních čísel dokažte *větu o úhlopříčkách rovnoběžníku*: Pro každý rovnoběžník $ABCD$ se stranami o délkách $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ a úhlopříčkami o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$ platí

$$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2). \tag{24}$$

Důkaz. Označíme komplexní souřadnice vrcholů rovnoběžníku $ABCD$ [1, obr. 4] po řadě z_A, z_B, z_C, z_D. Umístíme-li vrchol A do počátku O Gaussovy roviny, tj. položíme $z_A = 0$, je $u_1 = |z_B + z_D|$ a $u_2 = |z_B - z_D|$. S použitím vzorce (12) pak dostáváme: $u_1^2 + u_2^2 = |z_B + z_D|^2 + |z_B - z_D|^2 = 2(|z_B|^2 + |z_D|^2) = 2(a^2 + b^2)$.

Příklad 3 Dokažte užitím komplexních čísel *Thaletovu větu*: V libovolné kružnici k jsou všechny obvodové úhly AVB nad jejím průměrem AB pravé ($|\sphericalangle AVB| = 90°$).

Důkaz. Zvolme libovolnou kružnici k o poloměru r a středu S [1, obr. 7], který umístíme do počátku O Gaussovy roviny, takže průsečíky A, B kružnice k s osou $\mathrm{Re}\, z$ mají komplexní souřadnice $z_A = -r$, $z_B = r$. Komplexní souřadnice vrcholů V obvodových úhlů AVB označíme z_V ($|z_V| = r$). Pak pro vzdálenosti bodů A, B od vrcholů V platí

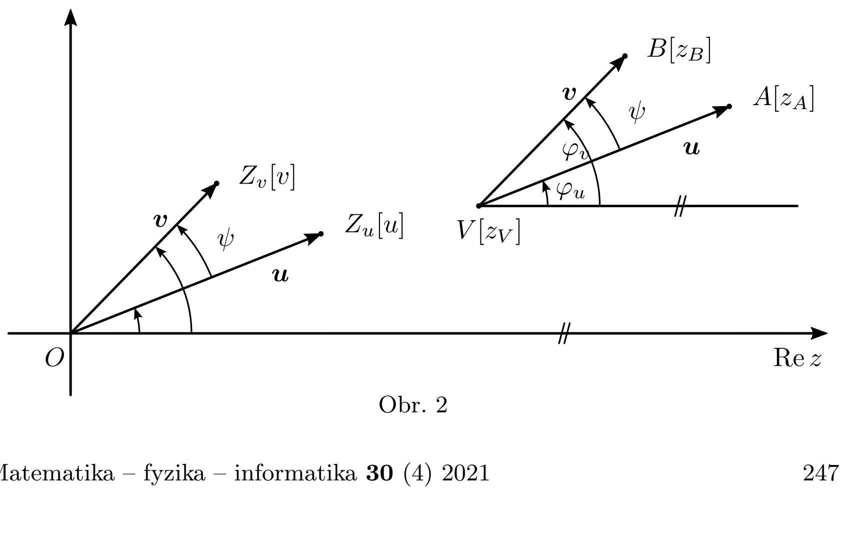
$$b = |VA| = |-r - z_V| = |z_V + r|, \quad a = |VB| = |r - z_V| = |z_V - r|,$$

takže

$$\begin{aligned} &b^2 + a^2 = |z_V + r|^2 + |z_V - r|^2 = \\ &= (z_V + r)(\overline{z_V} + r) + (z_V - r)(\overline{z_V} - r) = 2(z_V\overline{z_V} + r^2) = (2r)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Z odvozené rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ podle obrácené Pythagorovy věty plyne, že trojúhelník AVB (pro každé V) je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu V.

Příklad 4 V geometrických aplikacích komplexních čísel kromě jejich geometrické interpretace jako bodů Gaussovy roviny, resp. příslušných rádiusvektorů (průvodičů), tj. vázaných vektorů s počátečním bodem v jejím počátku O, se také efektivně používá (viz např. [8]) geometrické znázornění pomocí *volných geometrických vektorů*. Spočívá v tom, že nenulovým komplexním číslům u, resp. v (obvykle ve tvaru součtu, popř. rozdílu dvojic komplexních čísel z_1, z_2) se přiřazují jako jejich obrazy volné vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OZ}_u$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OZ}_v$, kde Z_u, Z_v jsou obrazy komplexních čísel u, v v Gaussově rovině. Kromě základního umístění $\boldsymbol{OZ}_u$, $\boldsymbol{OZ}_v$ vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ mohou mít též libovolné jiné zvolené umístění $\boldsymbol{VA}$, $\boldsymbol{VB}$ (obr. 2). Přitom platí, že $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{OZ}_u| = u$, $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{OZ}_v| = v$.



Obr. 2

Nechť komplexní čísla u, v mají goniometrické tvary

$$u = |u|(\cos\varphi_u + \mathrm{i}\,\sin\varphi_u), \quad v = |v|(\cos\varphi_v + \mathrm{i}\,\sin\varphi_v),$$

kde $\varphi_u = \arg u$, $\varphi_v = \arg v$ a $\varphi_v > \varphi_u$. Dokažte, že pak kladně orientovaný úhel vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ má velikost

$$\psi = |\sphericalangle\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = |\widehat{Z_u O Z_v}| = \varphi_v - \varphi_u = \arg\frac{v}{u} = \arg(u\overline{v}) = \arg(\overline{u}v). \tag{25}$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnosti kladně orientovaných úhlů v obr. 2: $\varphi_u + \psi = \varphi_v \Rightarrow \psi = \varphi_v - \varphi_u$ a dále použitím goniometrického vyjádření komplexních čísel u, v (popř. jejich exponenciálního vyjádření) dostáváme, viz rovnosti (17) a (21):

$$\psi = \varphi_v - \varphi_u = \arg v - \arg u = \arg\frac{v}{u} = \arg(u\overline{v}) = \arg(\overline{u}v),$$

tj. platí rovnosti (25), neboť $\mathrm{Re}(u\overline{v}) = \mathrm{Re}(\overline{u}v) = |u|\cdot|v|\cos(\varphi_v - \varphi_u) = |u|\cdot|v|\cos\psi$. Přitom zároveň pro příslušné volné vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je jejich skalární součin $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos|\sphericalangle\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\psi$. Odtud speciálně plyne *kritérium ortogonality (kolmosti) vektorů* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow |\sphericalangle\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = 90^\circ \Leftrightarrow \cos|\sphericalangle\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(u\overline{v}) = 0. \tag{26}$$

Příklad 5 Užitím kritéria (26) provedeme alternativní důkaz Thaletovy věty z příkladu 3 bez použití obrácené Pythagorovy věty.

Důkaz. Volné geometrické vektory $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{VA}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{VB}$ (viz [1, obr. 7]) jsou přiřazeny komplexním číslům $p = z_A - z_V$, $q = z_B - z_V$, přičemž $z_A = -r$, $z_B = r$ a $|z_V| = r$. Užitím kritéria (26) dokážeme, že $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{q}$ takto: Vyjdeme z výpočtu součinu

$$p\overline{q} = (z_A - z_V)(\overline{z_B - z_V}) = -(r + z_V)(r - \overline{z_V}) =$$
$$= -r^2 + z_V\overline{z_V} + r(\overline{z_V} - z_V) = -r^2 + |z_V|^2 + r(\overline{z_V} - z_V) = r(\overline{z_V} - z_V)$$

čili $\mathrm{Re}(p\overline{q}) = \mathrm{Re}\, r(\overline{z_V} - z_V) = 0$, a tedy podle (26) je $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{q}$, tj. $|\sphericalangle\, AVB| = 90^\circ$ pro všechny vrcholy V.

Příklad 6 Dokažte, že pro velikost úhlu volných geometrických vektorů $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{VA}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{VB}$ přiřazených komplexním číslům $u = z_A - z_V$, $v = z_B - z_V$ platí:

$$\psi = |\sphericalangle\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}| = |\widehat{AVB}| = \arg(z_B - z_V) - \arg(z_A - z_V) = \arg\frac{z_B - z_V}{z_A - z_V}. \tag{27}$$

Důkaz. Vztahy (27) vyplývají ze vztahů (25), viz obr. 2.

Příklad 7 Užitím komplexních čísel a přiřazených volných geometrických vektorů podle příkladu 6 dokažte *Ptolemaiovu větu* pro tětivové čtyřúhelníky: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ se stranami o délkách $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ a úhlopříčkami o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$ platí vztah

$$u_1 u_2 = ac + bd. \tag{28}$$

Důkaz. Vrcholům tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ [1, obr. 6] přiřadíme v Gaussově rovině po řadě komplexní souřadnice z_A, z_B, z_C, z_D, pro něž podle (22) platí identická rovnost

$$(z_A - z_B)(z_C - z_D) + (z_A - z_D)(z_B - z_C) = (z_A - z_C)(z_B - z_D), \tag{29}$$

přičemž $|z_A - z_B| = a$, $|z_B - z_C| = b$, $|z_C - z_D| = c$, $|z_A - z_D| = d$, $|z_A - z_C| = u_1$, $|z_B - z_C| = u_2$.

Velikosti vnitřních úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme reprezentovat jako velikosti kladně orientovaných úhlů $\widehat{BAD}, \widehat{CBA}, \widehat{DCB}, \widehat{ADC}$, jež lze vyjádřit na základě vztahů (27) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\alpha &= |\widehat{BAD}| = \arg(z_D - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \arg \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A},\\
\beta &= |\widehat{CBA}| = \arg(z_A - z_B) - \arg(z_C - z_B) = \arg \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B},\\
\gamma &= |\widehat{DCB}| = \arg(z_B - z_C) - \arg(z_D - z_C) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C},\\
\delta &= |\widehat{ADC}| = \arg(z_C - z_D) - \arg(z_A - z_D) = \arg \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}.
\end{aligned}$$

Přitom pro velikosti protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnosti (viz [1]):

$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \quad \beta + \delta = 180^\circ.$$

Po dosazení do první z těchto rovností (obdobně by bylo možné užít druhou rovnost) dostáváme:

$$\alpha + \gamma = \arg \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} + \arg \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} = \arg \frac{(z_D - z_A)(z_B - z_C)}{(z_B - z_A)(z_D - z_C)} = \arg(-1).$$

Odtud plyne, že

$$\arg(z_A - z_B)(z_C - z_D) = \arg(z_A - z_D)(z_B - z_C) = \varphi,$$

a tedy výrazy na levé straně rovnosti (29) lze vyjádřit v exponenciálním tvaru

$$\begin{aligned}(z_A - z_B)(z_C - z_D) &= |z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\\ (z_A - z_D)(z_B - z_C) &= |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovností získáváme levou stranu rovnosti (29) ve tvaru

$$\begin{aligned}&(z_A - z_B)(z_C - z_D) + (z_A - z_D)(z_B - z_C) =\\ &\qquad = [|z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| + |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C|] \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{aligned}$$

a pravá strana rovnosti (29) má obdobný tvar

$$(z_A - z_C)(z_B - z_D) = |z_A - z_C| \cdot |z_B - z_D| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Po dosazení do rovnosti (29) a vydělení $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ tak dostáváme, že platí rovnost

$$|z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| + |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C| = |z_A - z_C| \cdot |z_B - z_D|$$

čili $ac + bd = u_1 u_2$.

Příklad 8 Užitím komplexních souřadnic dokažte, že pro každý (konvexní nebo nekonvexní) čtyřúhelník platí *Varignonova věta*: Středy M, N, P, Q stran AB, BC, CD, DA libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vrcholy rovnoběžníku $MNPQ$.

Důkaz. Pro libovolně zvolený čtyřúhelník $ABCD$ [1, obr. 10a, b] v Gaussově rovině přiřaďme jeho vrcholům A, B, C, D komplexní souřadnice z_A, z_B, z_C, z_D a středům M, N, P, Q jeho stran komplexní souřadnice z_M, z_N, z_P, z_Q. Protože pro ně platí rovnosti $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$, $z_N = \frac{1}{2}(z_B + z_C)$, $z_P = \frac{1}{2}(z_C + z_D)$, $z_Q = \frac{1}{2}(z_D + z_A)$, plyne odtud:

$$\begin{aligned}
z_M - z_N &= \tfrac{1}{2}(z_A - z_C) \Rightarrow |z_M - z_N| = \tfrac{1}{2}(z_A - z_C) \text{ čili } |MN| = \tfrac{1}{2}|AC|,\\
z_Q - z_P &= \tfrac{1}{2}(z_A - z_C) \Rightarrow |z_Q - z_P| = \tfrac{1}{2}(z_A - z_C) \text{ čili } |QP| = \tfrac{1}{2}|AC|,\\
z_M - z_Q &= \tfrac{1}{2}(z_B - z_D) \Rightarrow |z_M - z_Q| = \tfrac{1}{2}(z_B - z_D) \text{ čili } |MQ| = \tfrac{1}{2}|BD|,\\
z_N - z_P &= \tfrac{1}{2}(z_B - z_D) \Rightarrow |z_N - z_P| = \tfrac{1}{2}(z_B - z_D) \text{ čili } |NP| = \tfrac{1}{2}|BD|,
\end{aligned}$$

takže dvojice protějších stran čtyřúhelníku $MNPQ$ jsou shodné, tj. je to rovnoběžník.

3. Závěr

Geometrické aplikace komplexních čísel jsou nejen zajímavou ukázkou jejich použití, ale mají také zásadní význam z hlediska propojení algebry s planimetrií. V článku uvedené příklady důkazů jednoduchých významných planimetrických vět mohou být vhodně využity ve výuce středoškolské matematiky. Další a složitější příklady jsou obsaženy v publikacích [6] až [10]. Zejména sbírka geometrických úloh [9] zahrnuje i velmi náročné důkazy planimetrických vět užitím komplexních čísel, jež jsou podrobně zpracovány (v návaznosti na četné ruské i jiné zahraniční matematické literární zdroje). Obdobně jako použití geometrických vektorových metod v planimetrii (viz [1]) i užití komplexních čísel v ní může významně přispět k hlubšímu porozumění matematice ve výuce a v práci s matematicky talentovanými studenty.

Literatura

[1] *Polák, J.*: Důkazy v planimetrii užitím vektorů. MFI, roč. 30 (2021), č. 3, s. 161–177.

[2] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.

[3] *Calda, E.*: Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla. 3. vydání, Prometheus, Praha, 2000.

[4] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 10. vydání, Prometheus, Praha, 2019.

[5] *Polák, J.*: Matematická analýza v komplexním oboru I. 2. vydání, ZČU FAV, Plzeň, 2002.

[6] *Ráb, M.*: Komplexní čísla v elementární matematice. MU PřF, Brno, 1996.

[7] *Larson, L. C.*: Problem-Solving Through Problems. Springer Verlag, New York - Berlin, 1983, (slovenský překlad: Metódy rešenia matematických problémov. Alfa, Bratislava, 1990).

[8] *Prasolov, V. V.*: Zadači po planimetrii. Časť II. Nauka, Moskva, 1986.

[9] *Modenov, P. S.*: Zadači po geometrii. Nauka, Moskva, 1979.

[10] *Dlab, V., Bečvář, J.*: Od aritmetiky k abstraktní algebře. Vlastním nákladem, Praha, 2016.