Geometrický průměr ve finanční matematice na střední škole

JAN FIALA – MARIKA HRUBEŠOVÁ

Ekonomická fakulta – Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Když se řekne průměrná hodnota, leckomu se nejprve vybaví nejznámější a nejpoužívanější průměr, totiž aritmetický průměr. Již děti na základní škole si pomocí něj počítají průměrnou známku, která může vyjadřovat jejich hodnocení z daného vyučovacího předmětu. Na středních školách se studenti mohou seznámit i s dalšími možnými průměry, např. s průměrem geometrickým či harmonickým.[1)] Málokdy se však studenti setkají s praktickým využitím těchto charakteristik při řešení různých úloh.

Článek se zaměřuje na geometrický průměr. Po zavedení geometrického průměru jsou představeny některé jeho vlastnosti, jejichž zařazení do výuky může přispět k rozvoji různých matematických znalostí a dovedností studentů (úlohy 1–4). Dále jsou řešeny úlohy 5 až 10 z ekonomie a finanční matematiky (např. výpočet průměrné procentní sazby změny hodnoty během určitého časového období), při nichž se právě geometrický průměr využívá.

Geometrický průměr a jeho geometrická interpretace

Geometrický průměr n nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (hodnot sledovaného kvantitativního znaku x), označený $\overline{x}_G$, je definován jako n-tá odmocnina součinu hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$,[2)] tj.

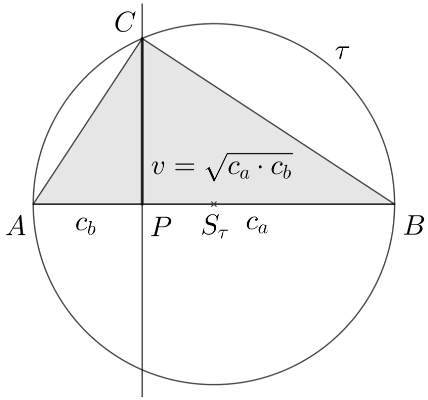
$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Speciálně pro $n = 2$ dostaneme $\overline{x}_G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

[1)] Průměry jsou např. s mediánem či modem statistickými charakteristikami polohy neboli tzv. středními hodnotami souboru dat. Charakteristiky polohy různým způsobem vypovídají o střední hodnotě souboru dat.

[2)] Často se užívá formulace, že x_i tvoří datovou řadu.

Geometrický průměr dvou kladných čísel c_a, c_b lze geometricky interpretovat jako velikost v výšky CP v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C (na obr. 1 představují kladná čísla c_a, c_b po řadě délky úseček BP, AP), kterému je opsána Thaletova kružnice τ sestrojená nad průměrem AB. Konstrukce úsečky představující geometrický průměr dvou úseček kladných délek užívá Eukleidovu větu o výšce, která v obr. 1 vyplývá z rovnosti poměrů odpovídajících si stran v podobných trojúhelnících APC a CPB (uu).



Obr. 1 Geometrická interpretace geometrického průměru dvou čísel c_a, c_b

Úloha 1

Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky $u = \sqrt{8}$ cm.

Řešení. Číslo 8 lze napsat v součinovém tvaru $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, tedy $u = \sqrt{8} = \sqrt{1 \cdot 8} = \sqrt{2 \cdot 4}$. Délka úsečky je tedy geometrickým průměrem např. čísel $c_a = 4$ a $c_b = 2$. Podle obr. 1 sestrojíme úsečku délky $c_a + c_b = 4 + 2$ a nad ní jako nad průměrem Thaletovu kružnici τ. Výška v v obr. 1 představuje hledanou úsečku u délky $\sqrt{8}$ cm.

Základní vlastnosti geometrického průměru

Geometrický průměr je na rozdíl od aritmetického průměru definován pouze pro nezáporná reálná čísla x_i. Pokud bude alespoň jeden z činitelů roven nule, bude geometrický průměr také roven nule. Na rozdíl od aritmetického průměru není hodnota geometrického průměru výraznou měrou ovlivněna extrémními hodnotami ze souboru dat.

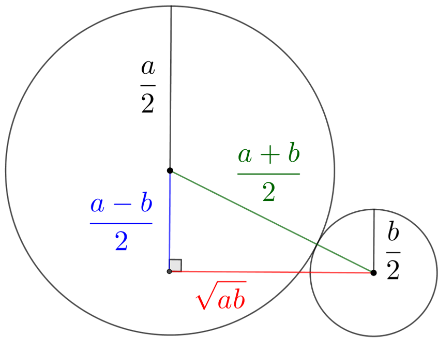
Vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

Je známo, že geometrický průměr $\overline{x}_G$ nezáporných reálných hodnot x_1, x_2, …, x_n je vždy menší nebo roven jejich aritmetickému průměru $\overline{x}$, tj. platí

$$\overline{x}_G \leq \overline{x}. \tag{2}$$

Rovnost zde nastává, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Platnost vztahu (2) pro $n = 2$ lze snadno geometricky ověřit např. v obrázku 1, kde velikost poloměru $S_\tau C$ kružnice τ představující hodnotu aritmetického průměru čísel c_b, c_a bude vždy větší nebo nejvýše rovna velikosti výšky v.

Geometrický důkaz beze slov je uveden např. [3, str. 51], viz obr. 2.



Obr. 2 Geometrická interpretace nerovnosti geometrického a aritmetického průměru dvou čísel a, b

Úloha 2

Algebraickými úpravami dokažte nerovnost (2) pro dvě libovolná nezáporná reálná čísla x_1 a x_2.

Řešení. Máme dokázat, že pro každá dvě nezáporná reálná čísla x_1, x_2 platí

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$

Po vynásobení obou stran nerovnice (3) dvěma, následném umocnění obou nezáporných stran nerovnice na druhou a úpravě nerovnice dostaneme

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 . \tag{4}$$

Tato nerovnice (4) platí pro každá x_1 a x_2, platí tedy tvrzení (3). Rovnost zde nastane, právě když $x_1 = x_2$.

Poznámka. Důkaz nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro n ($n > 2$) nezáporných hodnot $x_1, \ldots, x_n$ zde kvůli rozsahu důkazu neuvádíme.[3)]

Logaritmus geometrického průměru

Logaritmus při základu a ($a > 0$, $a \neq 1$) geometrického průměru kladných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ je roven aritmetickému průměru jejich logaritmů, tj. platí

$$\log_a \overline{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i. \tag{5}$$

Úloha 3

Užitím pravidel o logaritmech ověřte platnost rovnosti (5).

Řešení. Užitím základních pravidel pro počítání s logaritmy máme

$$\log_a \overline{x}_G = \log_a \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}},$$

tj.

$$\log_a \overline{x}_G = \frac{1}{n} \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n).$$

Kromě toho dále platí

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n,$$

tedy

$$\log_a \overline{x}_G = \frac{1}{n} (\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i,$$

což jsme chtěli ukázat.

Úloha 4

Použitím logaritmů (bez kalkulátoru) vypočítejte geometrický průměr čísel 16 a 1 024.

---

3) Důkaz lze nalézt např. v [2, str. 7–15] nebo [5, str. 17–18].

Řešení. Pokud nemůžeme k řešení využít kalkulátor, pomohou nám k vyřešení úlohy logaritmy. Stačí si uvědomit, že číslo $16 = 2^4$ a číslo $1024 = 2^{10}$. Obě čísla logaritmujeme o základu 2, takže $\log_2 16 = 4$ a $\log_2 1024 = 10$. Vypočteme aritmetický průměr exponentů 4 a 10 (ten je 7) a tímto výsledkem umocníme základ logaritmu 2. Geometrický průměr čísel 16 a 1 024 je tedy $2^7 = 128$.

Některá užití geometrického průměru ve finanční matematice

Jak už jsme se zmínili v úvodu článku, geometrický průměr se používá k výpočtu některých ekonomických ukazatelů, obecně k výpočtu průměrných hodnot růstových charakteristik v čase. Geometrický průměr lze tedy aplikovat na koeficienty růstu dané veličiny, např. pro výpočet průměrného tempa růstu HDP, hrubé mzdy, devizového kurzu, zisku firmy apod.[4)]

Poměrně častá je otázka na průměrnou procentovou míru růstu (poklesu) (také tempo růstu) ceny zboží při jeho opakovaném zdražování nebo zlevňování, tedy např. o kolik procent průměrně vzrostly ceny každý měsíc během celého roku, jaký byl průměrný růst cen akcií, cen bytů, roční míry inflace apod.

Považujme cenu c nějakého zboží (služby) za veličinu, kde c_0 je hodnota na začátku a hodnoty c_1 až c_n na konci n sledovaných n stejně dlouhých období. Čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ definujeme jako poměry dvou po sobě jdoucích hodnot sledované veličiny c, změřené vždy na konci daného období, tj.

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0},\ r_2 = \frac{c_2}{c_1}, \ldots,\ r_n = \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nazýváme koeficienty růstu (poklesu) ceny c. Průměrnou hodnotu koeficientu r růstu ceny c nazýváme průměrné tempo růstu a označíme x. Uplatníme-li tedy stejnou hodnotu x pro všechny hodnoty zdražení, pak pro různé hodnoty ceny c_0 a c_n musí platit:

$$c_0 \cdot x^n = c_n,$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{c_n}{c_0}}. \tag{6}$$

Průměrnou procentovou míru růstu (pro $x > 1$), resp. poklesu (pro $x < 1$) lze vyjádřit vztahem $(x - 1) \cdot 100$, resp. $(1 - x) \cdot 100$.

[4)] Viz např. [1, str. 35, 249, 356] aj.

Následující úloha 5 zdůvodňuje, proč je při výpočtu průměrné hodnoty koeficientu růstu nezbytné využít geometrický průměr a jak postupovat, jsou-li přímo zadané procentní hodnoty zdražení či zlevnění ceny zboží.

Úloha 5

Původní cena zboží byla 1 000 Kč. Zboží bylo dvakrát zdraženo: nejdříve na 1 250 Kč, pak na hodnotu 1 375 Kč. Jaká byla průměrná procentová míra zdražení, tzn. o kolik procent by muselo být zboží s původní cenou dvakrát po sobě zdraženo, aby cena zboží po druhém zdražení byla 1 375 Kč?

Řešení. Pomocí podílů nové ceny po každém zdražení a ceny přímo předcházející, tj. $r_1 = \frac{1\,250}{1\,000} = 1{,}25$ a $r_2 = \frac{1\,375}{1\,250} = 1{,}1$, snadno zjistíme, že po prvním zdražení vzrostla cena zboží o 25 % a po druhém zdražení o 10 % vůči předchozí ceně.

	c_0	c_1	c_2
Cena zboží [Kč]	1 000	1 250	1 375
Koeficient r_i růstu ceny c		$\frac{1\,250}{1\,000} = 1{,}25$	$\frac{1\,375}{1\,250} = 1{,}1$

Tabulka 1 Průběžné ceny zboží s odpovídajícími koeficienty růstu ceny

Z tabulky 1 vyplývá, že cena po druhém zdražení 1 375 Kč je rovna součinu počáteční ceny 1 000 Kč a koeficientů r_1, r_2, tj. $1\,000 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}1 = 1\,375$ Kč.

Pomocí vztahu (6) lze vypočítat průměrné tempo růstu:

$$x = \sqrt{1{,}375} = \sqrt{\frac{1\,375}{1\,000}} = \sqrt{1{,}25 \cdot 1{,}1} \doteq 1{,}172\,6. \tag{7}$$

Průměrné tempo růstu, resp. průměrná hodnota koeficientu r je po zaokrouhlení 1,173, tedy průměrná procentová míra zdražení zboží činila přibližně 17,3 %. Stejný výsledek získáme také z úvahy, podle které hledáme takovou hodnotu x průměrného tempa růstu ceny, pro kterou by platila rovnice

$$1\,000 \cdot x \cdot x = 1\,375.$$

Poznámka. Pokud bychom průměrné tempo růstu (poklesu) určili za použití aritmetického průměru jako podíl $\frac{25+10}{2}$ % = 17,5 %, byla by cena zboží po dvojím zdražení 1 380,625 Kč, což je chybný výsledek.

Poznámka. Výraz $\sqrt{1{,}25 \cdot 1{,}1}$ ve výpočtu (7) lze obecně zapsat $x = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$, což je vzorec (1) pro výpočet geometrického průměru pro $n = 2$.

Jsou-li při řešení úloh přímo zadané hodnoty p_1, p_2, ..., p_n procentových měr zdražení zboží (v %), pak pro výpočet průměrné hodnoty růstu ceny zboží (nebo jiné veličiny) postupujeme pomocí vztahu

$$x = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}, \tag{8}$$

kde

$$x_i = 1 + \frac{p_i}{100}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{9}$$

V případě zlevňování se ve vzorci (9) změní součty na rozdíly.

Průměrná úroková sazba za sledované období se vypočítá jako geometrický průměr jednotlivých hodnot úrokových měr v daných úrokových obdobích a je vždy menší nebo maximálně rovna aritmetickému průměru jednotlivých úrokových měr. Aritmetický průměr má tendenci nadhodnocovat průměrné hodnoty: čím více se vstupy (zadané hodnoty) za daná období od sebe liší, tím více se hodnota aritmetického průměru odlišuje od hodnoty geometrického průměru. Např. pokud se výnosy zvýší za první období o 90 % a v dalším období se sníží o 20 %, je meziroční rozdíl 110 %, což je značně velká odchylka. Aritmetický průměr 35 % by zde byl velmi nadhodnocený a nepřesný. Důvodem je fakt, že čísla nejsou na sobě nezávislá. Naproti tomu geometrický průměr po zaokrouhlení 23,3 % je relevantní údaj. Pokud jsou však hodnoty vstupů sobě blíže, může být aritmetický průměr rychlou cestou k odhadu výnosů (hodnota ale i tak nebude přesná).

Úloha 6

Uvažujme akcii, jejíž cena v prvním roce rostla o 10 %, v druhém roce klesla o 20 % a v třetím roce opět klesla o 15 %. Jaký byl průměrný procentový růst ceny dané akcie?

Řešení. Průměrné tempo růstu cen akcie je geometrickým průměrem dat o růstu (poklesu) její ceny. Po dosazení do vzorců (8) a (9) bude

$$\overline{x}_G = \sqrt[3]{(1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}15)} \doteq 0{,}908,$$

tedy průměrný pokles ceny akcie byl po zaokrouhlení 9,2 % ($1 - 0{,}908 = 0{,}092$, tj. 9,2 %). Číslo 9,2 % vyjadřuje hodnotu průměrného konstantního poklesu ceny akcie ve sledovaných letech, tedy platí $0{,}908^3 \doteq 1{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85$.

Úloha 7

Tempo růstu cen bytů bylo v období čtyř po sobě jdoucích let postupně 2 %, 1 %, 3 % a 3 %. Vypočítejte průměrnou hodnotu koeficientu růstu cen bytů.

Řešení. Opět s využitím vzorců (8) a (9) dostaneme

$$\overline{x}_G = \sqrt[4]{1{,}02 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03} \doteq 1{,}0225,$$

tzn. průměrné tempo růstu je po zaokrouhlení 2,25 %. Číslo 2,25 % vyjadřuje přibližnou hodnotu průměrného konstantního růstu cen v každém ze čtyř sledovaných měsíců, a proto platí $1{,}0225^4 \doteq 1{,}02 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03$.

Úloha 8

Tabulka 2 udává hodnoty průměrné roční míry inflace[5)] v České republice za roky 1999–2008. Vypočítejte průměrnou roční míru inflace za celé období. O kolik procent se zvýšila průměrná cenová hladina od roku 1998 do roku 2008?[6)]

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
2,1 %	3,9 %	4,7 %	1,8 %	0,1 %	2,8 %	1,9 %	2,5 %	2,8 %	6,3 %

Tabulka 2 Míry inflace v letech 1999–2008

Řešení. S využitím vzorců (8) a (9) dostaneme

$$\overline{x}_G = \sqrt[10]{1{,}021 \cdot \ldots \cdot 1{,}063} \doteq 1{,}028\,77.$$

Průměrná roční míra inflace byla po zaokrouhlení 2,88 %, pokud zaokrouhlujeme na setiny. Zvýšení průměrné cenové hladiny od roku 1998 do roku 2008 se vypočítá podle vzorce (6) pro $n = 10$, tedy

$$\frac{c_{10}}{c_0} = (x)^{10} \doteq 1{,}028\,77^{10} \doteq 1{,}328,$$

tedy došlo k cenovému zvýšení přibližně o $32,8$ %.

[5)] Míra inflace je často definovaná jako procentní tempo růstu cenové hladiny za dané období, přičemž za cenovou hladinu je považována průměrná úroveň cen zboží a služeb.

[6)] Podle [4, str. 170].

Úloha 9

Úspory a vložené do banky se úročí v prvním roce úrokovou mírou ve výši 2 %, ve druhém roce 3,5 % a ve třetím roce úrokovou mírou 5 %. Jaká konstantní výše úrokové míry vkladu v každém roce by zajistila stejný zisk?[7)]

Řešení. S měnící se hodnotou úrokové míry bude výsledná hodnota vloženého kapitálu $1{,}02 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}05 \cdot a$. Při konstantní hodnotě p úrokové míry po dobu všech tří let to je $(1+p)^3 \cdot a$.

Ze zadání předpokládáme rovnost výsledného kapitálu na konci tří let: $1{,}02 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}05 \cdot a = x^3 \cdot a$, přičemž $x = 1 + p$. Dostáváme

$$x = \sqrt[3]{1{,}108\,485} \doteq 1{,}034\,9.$$

Tedy $p \doteq 0{,}034\,9$, což odpovídá po zaokrouhlení úrokové míře 3,49 %.

Úloha 10

Banka nabízí spořící produkt na 5 let se zhodnocením vložených finančních prostředků ve výši a o 12 %. Jaká je roční úroková míra nabízená bankou?

Řešení. Po pěti úrokovacích obdobích bude celková částka $1{,}12 \cdot a$. Označme x průměrné zhodnocení za jedno úrokovací období. Pak platí rovnost

$$1{,}12 \cdot a = x^5 \cdot a,$$
$$x = \sqrt[5]{1,12} \doteq 1{,}022\,92.$$

Roční úroková míra činí po zaokrouhlení 2,29 %.

Závěr

Učivo o geometrickém průměru je zajímavým a užitečným nástrojem pro rozvoj různých matematických znalostí a dovedností studentů středních škol, neboť poskytuje příležitosti pro řešení výpočtových úloh např. z oblasti finanční matematiky. Rozvoj finanční gramotnosti mladých lidí se stává jednou ze stěžejních oblastí matematického učiva na základní a střední škole s praktickým dopadem do běžného života studentů.

[7)] Neuvažujte žádné bankovní poplatky ani daň z příjmu.

Literatura

[1] *Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.*: Statistika v ekonomii. Professional Publishing, Příbram, 2018.

[2] *Navrátil, J.*: AG–nerovnost v příkladech. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno, 2010. Dostupné na: https://is.muni.cz/th/sf147/diplomka.pdf

[3] *Nelsen, R. B.*: Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America, Washington. 1993. Dostupné na: https://moodle.tau.ac.il/2018/pluginfile.php/403616/mod_resource/content/1/Nelsen%201993%20Proofs%20without%20Words.pdf

[4] *Robová, J., Hála, M., Calda, E.*: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Matematika pro střední školy. Prometheus, Praha, 2013.

[5] *Rolínek, M., Šalom, P.*: Zdolávání nerovností. Univerzita J. U. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2012.

Tři speciální body ležící na jedné přímce II

JAROSLAV ZHOUF

Vysoká škola ekonomická, Praha

V minulém článku na uvedené téma jsme se soustředili na připomenutí známých skutečností, a to že na jedné přímce leží např. vrchol trojúhelníku, střed jeho protilehlé strany a jeho těžiště a také na jedné přímce leží vrchol trojúhelníku, pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protilehlou stranu a průsečík výšek. Těchto faktů pak bylo využito k uvedení dalších zajímavých trojic bodů ležících také na jedné přímce.

V článku nám šlo hlavně o důkazy těchto konfigurací. Byly zvoleny různorodé důkazy, které neměly společného jmenovatele. Ve stávajícím článku se seznámíme s jednou obecnou větou, pomocí níž se dá dokázat incidence