L i t e r a t u r a

[1] *Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.*: Statistika v ekonomii. Professional Publishing, Příbram, 2018.

[2] *Navrátil, J.*: AG–nerovnost v příkladech. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno, 2010. Dostupné na: https://is.muni.cz/th/sf147/diplomka.pdf

[3] *Nelsen, R. B.*: Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America, Washington. 1993. Dostupné na: https://moodle.tau.ac.il/2018/pluginfile.php/403616/mod_resource/content/1/Nelsen%201993%20Proofs%20without%20Words.pdf

[4] *Robová, J., Hála, M., Calda, E.*: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Matematika pro střední školy. Prometheus, Praha, 2013.

[5] *Rolínek, M., Šalom, P.*: Zdolávání nerovností. Univerzita J. U. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2012.

Tři speciální body ležící na jedné přímce II

JAROSLAV ZHOUF

Vysoká škola ekonomická, Praha

V minulém článku na uvedené téma jsme se soustředili na připomenutí známých skutečností, a to že na jedné přímce leží např. vrchol trojúhelníku, střed jeho protilehlé strany a jeho těžiště a také na jedné přímce leží vrchol trojúhelníku, pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protilehlou stranu a průsečík výšek. Těchto faktů pak bylo využito k uvedení dalších zajímavých trojic bodů ležících také na jedné přímce.

V článku nám šlo hlavně o důkazy těchto konfigurací. Byly zvoleny různorodé důkazy, které neměly společného jmenovatele. Ve stávajícím článku se seznámíme s jednou obecnou větou, pomocí níž se dá dokázat incidence s jednou přímkou nejen dříve uvedených trojic bodů, ale i dalších významných trojic bodů. Touto větou je tzv. Menelaova věta. Jejím velkým pomocníkem nám bude také tzv. Cèvova věta, ve které se duálně místo o trojici bodů na jedné přímce (tzv. kolinearitě bodů) mluví o trojici přímek procházejících jedním bodem (tzv. konkurenci přímek).

Věta Menelaova

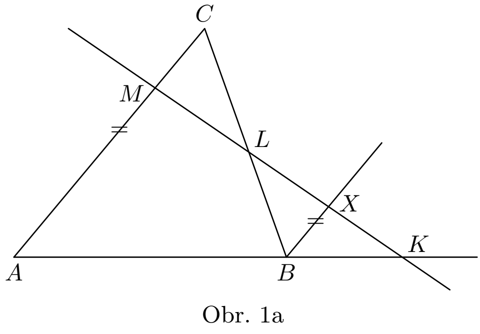
Na úvod si uveďme znění i důkaz první z avizovaných vět.

Věta 1 (Menelaova) V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Body K, L, M leží na jedné přímce, právě když zároveň platí:

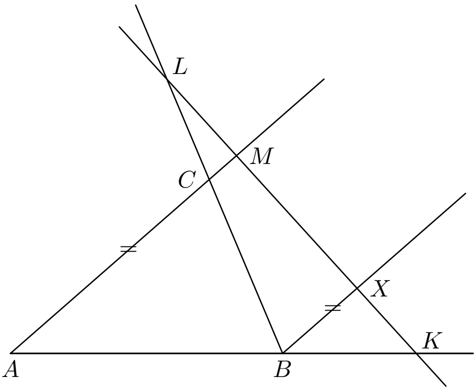
1. z bodů K, L, M leží na stranách trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný,
2. $\dfrac{|AK|}{|BK|} \cdot \dfrac{|BL|}{|CL|} \cdot \dfrac{|CM|}{|AM|} = 1.$

Důkaz. Dokážeme nejprve první implikaci této věty.

Předpokládáme, že body K, L, M leží na jedné přímce. V takovém případě je jasné, že platí tvrzení 1. Rozložení bodů K, L, M je např. takové, jak je znázorněno na obr. 1a, 1b. Označme ještě X průsečík přímky KL a rovnoběžky vedené bodem B s přímkou AC. Uvažujme jednak stejnolehlost se středem K, kde např. platí $|AK| : |BK| = |AM| : |BX|$, a jednak stejnolehlost se středem L, kde např. platí $|BL| : |CL| = |BX| : |CM|$. Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.



Obr. 1a



Obr. 1b

Nyní se zaměříme na opačnou implikaci věty.

Podle tvrzení 1 předpokládejme například, že uvnitř strany AB neleží bod K, že leží například uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA. Kdyby byla přímka ML rovnoběžná s přímkou AB, byly by trojúhelníky ABC a MLC podobné, takže by platilo $|CM| : |AM| = |CL| : |BL|$. Z této rovnosti a z tvrzení 2 dostaneme $|AK| = |BK|$, což dává jedinou možnost, a sice že K je střed AB. To je ale spor, takže ML a AB jsou různoběžky. Jejich průsečík označme J.

Podle prvně dokázané implikace pro body J, L, M, které leží na jedné přímce, platí

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Zároveň podle tvrzení 2 platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Z obou rovností vyplývá

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

A z předpokladu o poloze bodu K vyplývá nerovnost

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} = \frac{|AK|}{|BK|} > 1.$$

V případě $|AJ| \geq |AK|$ platí $|AJ| = |AK| + |KJ|$ a $|BJ| = |BK| + |KJ|$. Dosazením těchto dvou rovností do rovnosti $|AJ| : |BJ| = |AK| : |BK|$ dostaneme $|KJ| = 0$, tedy $K = J$. A jelikož body J, L, M leží na jedné přímce, leží i body K, L, M na jedné přímce, což jsme měli dokázat.

Stejný postup důkazu by byl i pro případ $|AJ| \leq |AK|$.

Věta Cèvova

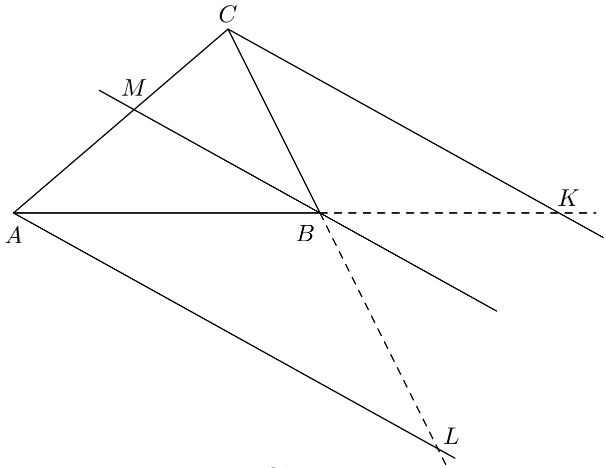
A nyní ještě uveďme znění i částečný důkaz druhé z avizovaných vět.

Věta 2 (Cèvova) V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Přímky CK, AL, BM procházejí jedním bodem, nebo jsou vzájemně rovnoběžné, právě když zároveň platí:

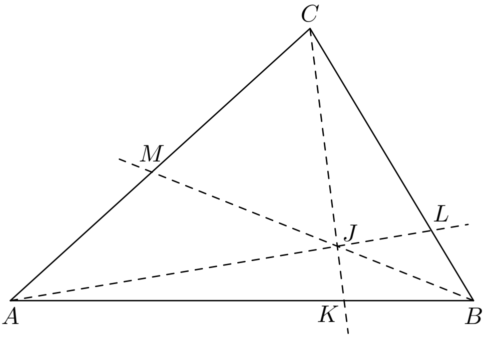
1. z bodů K, L, M leží na stranách trojúhelníku buď právě jeden, nebo všechny tři,
2. $\dfrac{|AK|}{|BK|} \cdot \dfrac{|BL|}{|CL|} \cdot \dfrac{|CM|}{|AM|} = 1.$

Důkaz. Dokážeme nejprve první implikaci v této větě.

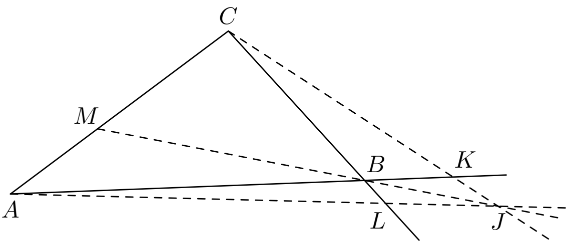
Předpokládáme, že přímky CK, AL, BM mají jeden společný průsečík, nebo jsou vzájemně rovnoběžné. V takovém případě je jasné, že platí tvrzení 1, viz obr. 2a, 2b, 2c.



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Jsou-li přímky CK, AL, BM vzájemně rovnoběžné (obr. 2a), tak z bodů K, L, M patří trojúhelníku ABC jediný, a to např. bod M. Uvažujme jednak stejnolehlost se středem A, kde například platí $|AK| : |BK| = |CA| : |CM|$, a také stejnolehlost se středem C, kde například platí $|BL| : |CL| = |AM| : |CA|$. Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.

Procházejí-li přímky CK, AL, BM společným bodem J (obr. 2b, 2c), použijeme Menelaovu větu. Jednak pro trojúhelník AKC a přímku BM platí

$$\frac{|AB|}{|BK|} \cdot \frac{|KJ|}{|CJ|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1,$$

jednak pro trojúhelník BCK a přímku AL platí

$$\frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CJ|}{|KJ|} \cdot \frac{|AK|}{|AB|} = 1.$$

Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.

Nyní se zaměříme na opačnou implikaci v této větě.

Podle tvrzení 1 předpokládejme například, že uvnitř strany AC leží bod M. V tomto případě mohou nastat dvě situace.

První případ je takový, že přímka MB je rovnoběžná s přímkou CK (obr. 2a). Uvažujme případ, kdy bod K leží na polopřímce opačné k polopřímce BA; případ, kdy bod K leží na polopřímce opačné k polopřímce AB, se řeší analogicky. Díky stejnolehlosti se středem A platí např. $|AK| : |BK| = |AC| : |CM|$. Použijeme-li k tomu rovnost z tvrzení 2, dostaneme postupně

$$\frac{|AC|}{|CM|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1, \qquad \frac{|AC|}{|AM|} = \frac{|CL|}{|BL|}.$$

Protože $\frac{|AC|}{|AM|} > 1$, je $\frac{|CL|}{|BL|} > 1$, což znamená, že bod L leží na polopřímce opačné k polopřímce BC. Proto platí

$$\frac{|AM| + |MC|}{|AM|} = \frac{|CB| + |BL|}{|BL|}, \qquad \frac{|MC|}{|AM|} = \frac{|CB|}{|BL|}.$$

Z této rovnosti vyplývá, že je také přímka AL rovnoběžná s přímkami MB a CK. Tím je důkaz opačné implikace pro tuto situaci proveden.

Druhý případ je takový, že přímky MB a CK jsou různoběžné (obr. 2b, 2c). Jejich průsečík označme J. Dokážeme, že bodem J prochází i přímka AL. Pro trojúhelník AKC a přímku MB použijeme Menelaovu větu, takže platí

$$\frac{|AB|}{|KB|} \cdot \frac{|KJ|}{|CJ|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1,$$

neboli

$$\frac{|CM|}{|AM| \cdot |BK|} = \frac{|CJ|}{|AB| \cdot |KJ|}.$$

Použijeme-li k tomu rovnost z tvrzení 2 ve tvaru

$$\frac{|CM|}{|AM| \cdot |BK|} = \frac{|CL|}{|AK| \cdot |BL|},$$

dostaneme

$$\frac{|AK|}{|AB|} \cdot \frac{|LB|}{|LC|} \cdot \frac{|JC|}{|JK|} = 1.$$

A to je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník BKC a přímku AL, neboli že body A, L, J leží na jedné přímce.

Vrchol trojúhelníku, střed jeho protější strany a těžiště

Máme dán trojúhelník ABC a A_1, B_1, C_1 středy protilehlých stran k jeho vrcholům. Označme T (těžiště) průsečík přímek (těžnic) AA_1 a BB_1. Dokážeme, že pak body C, T, C_1 leží na jedné přímce, tj. všechny těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Jeden důkaz tohoto tvrzení jsme prezentovali v předchozím článku. Nyní uvedeme ještě dva důkazy, a to pomocí prostředků uvedených v tomto článku, tj. pomocí Cèvovy věty a Menelaovy věty.

Nejprve tedy důkaz pomocí Cèvovy věty. Vypočítáme pro trojúhelník ABC a středy jeho stran A_1, B_1, C_1 tuto hodnotu:

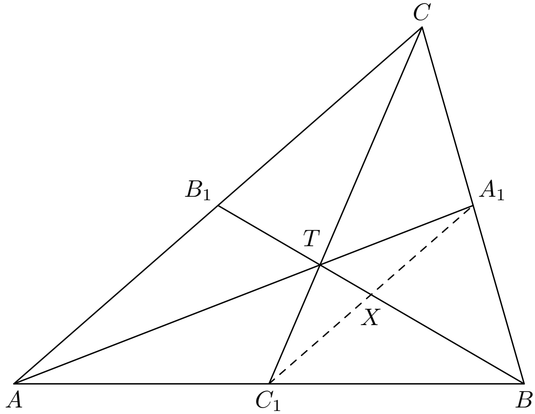
$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\cdot\frac{|BA_1|}{|CA_1|}\cdot\frac{|CB_1|}{|AB_1|}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že se těžnice trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě T. To je důkaz, že body C_1, T, C leží na jedné přímce.

Nyní důkaz pomocí Menelaovy věty. Průsečík přímek AA_1 a BB_1 označíme T a průsečík přímek BT a A_1C_1 označíme X (obr. 3). Jelikož $|AC| = 2|C_1A_1|$, tak díky stejnolehlosti se středem T je $|B_1T| = 2|TX|$. Podobně díky stejnolehlosti se středem B je $|B_1B| = 2|XB|$. Takže $|TB| = 2|B_1T|$. Nyní již můžeme pro trojúhelník ABB_1 a body C_1, T, C vypočítat hodnotu:

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\cdot\frac{|BT|}{|B_1T|}\cdot\frac{|B_1C|}{|AC|}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}=1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že body C_1, T, C leží na jedné přímce.



Obr. 3

Vrchol trojúhelníku, pata výšky na protější straně a ortocentrum

Máme dán trojúhelník ABC a A_0, B_0, C_0 paty kolmic vedených postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany. Označme V (ortocentrum, průsečík výšek) průsečík přímek (výšek) AA_0 a BB_0. Dokážeme, že pak body C, V, C_0 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny výšky trojúhelníku protínají v jednom bodě.

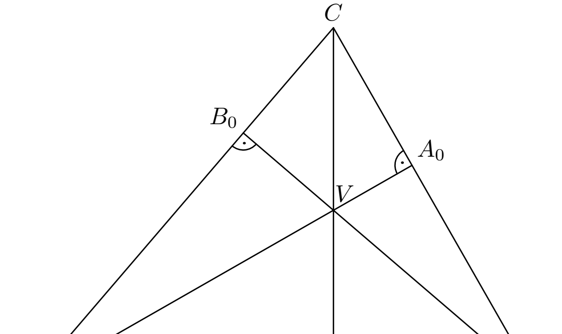
Analogicky jako v předchozí kapitole byl jeden důkaz tohoto tvrzení prezentován v předchozím článku. I nyní uvedeme ještě dva důkazy, a to pomocí Cèvovy věty a Menelaovy věty.

Nyní tedy důkaz pomocí Cèvovy věty. Označme klasicky a, b, c délky stran a α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

Důkaz provedeme nejprve pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 4a). Vypočteme hodnotu:

$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BA_0|}{|CA_0|} \cdot \frac{|CB_0|}{|AB_0|} = \frac{b\,\cos\alpha}{a\,\cos\beta} \cdot \frac{c\,\cos\beta}{b\,\cos\gamma} \cdot \frac{a\,\cos\gamma}{c\,\cos\alpha} = 1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že se výšky trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě V. To znamená důkaz, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.



Obr. 4a

Podobně provedeme důkaz pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem např. u vrcholu B (obr. 4b). Vypočteme hodnotu:

$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BA_0|}{|CA_0|} \cdot \frac{|CB_0|}{|AB_0|} = \frac{b\,\cos\alpha}{a\,\cos(180^\circ - \beta)} \cdot \frac{c\,\cos(180^\circ - \beta)}{b\,\cos\gamma} \cdot \frac{a\,\cos\gamma}{c\,\cos\alpha} = 1$$

I zde podle získané hodnoty vidíme, že se výšky trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě V, což opět znamená důkaz, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

Nyní ještě dokážeme tvrzení pouze pomocí Menelaovy věty.

V trojúhelníku ABC sestrojíme výšky AA_0, BB_0, CC_0. Průsečík výšek AA_0, BB_0 označíme V. Uvažujme trojúhelník ABB_0. Chceme dokázat, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

Důkaz provedeme nejprve pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 4a). Vypočteme hodnotu:

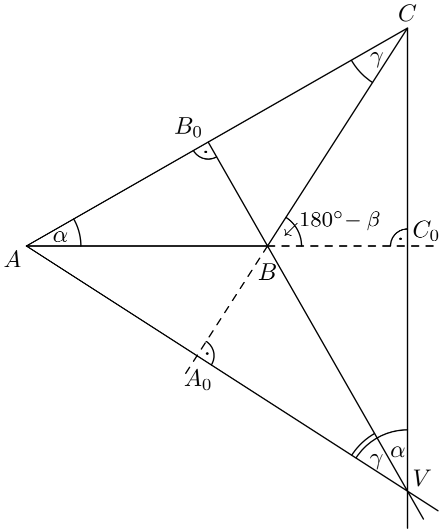
$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|BV|}{|B_0V|}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|BB_0|-|B_0V|}{|B_0V|}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=$$
$$=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|BB_0|-|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha}{|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=$$
$$=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|BB_0|-|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha}{|AC|\operatorname{cotg}\alpha}=\frac{b\cos\alpha}{a\cos\beta}\cdot\frac{a\sin\gamma-a\cos\gamma\operatorname{cotg}\alpha}{b\operatorname{cotg}\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma-\cos\gamma\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\cdot(\sin\gamma-\cos\gamma\operatorname{cotg}\alpha)=$$
$$=\frac{\sin\alpha\sin\gamma-\cos\gamma\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{-\cos(\alpha+\gamma)}{\cos\beta}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta}=1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

A ještě přidáme důkaz pro tupoúhlý trojúhelník (obr. 4b). Vypočteme hodnotu:

$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|BV|}{|B_0V|}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|B_0V|-|BB_0|}{|B_0V|}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=$$
$$=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha-|BB_0|}{|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{|B_0C|}{|AC|}=\frac{|AC_0|}{|BC_0|}\cdot\frac{|B_0C|\operatorname{cotg}\alpha-|BB_0|}{|AC|\operatorname{cotg}\alpha}=$$
$$=\frac{b\cos\alpha}{a\cos(180^\circ-\beta)}\cdot\frac{a\cos\gamma\operatorname{cotg}\alpha-a\sin\gamma}{b\operatorname{cotg}\alpha}=$$
$$=\frac{\cos\alpha}{-\cos\beta}\cdot\frac{\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{-\cos\beta}=\frac{-\cos\beta}{-\cos\beta}=1$$

Také zde vidíme, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.



Obr. 4b

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Trojúhelník ABC má délky stran a, b, c. Těžnice ho rozdělí na šest trojúhelníků, jejichž těžiště tvoří vrcholy šestiúhelníku. Jaký je jeho a) obvod, b) obsah vzhledem k obvodu a obsahu trojúhelníku ABC?

Úloha 2

Body C, D leží na polokružnici s průměrem AB. Přímky AC a BD se protínají v bodě P, přímky AD a BC v bodě Q. Z bodu P je vedena kolmice na úsečku AB s patou R. Dokažte, že body P, Q, R leží na jedné přímce.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Označme $2s$ obvod, v_b, v_c výšky po řadě z vrcholů B, C a A_1, B_1, C_1 středy stran, T těžiště trojúhelníku ABC, dále T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 těžiště trojúhelníků AC_1T, BC_1T, BA_1T, CA_1T, CB_1T, AB_1T a C_2, C_3, A_2 středy úseček AC_1, BC_1, BA_1.

a) Z podobnosti trojúhelníků T_1T_2T a C_2C_3T plyne $|T_1T_2| = \frac{c}{3}$. Z podobnosti trojúhelníků T_2T_3T a C_3A_2T plyne $|T_2T_3| = \frac{b}{6}$. Analogicky to platí pro délky dalších stran. Ovod šestiúhelníku je

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)(a+b+c)=s.$$

b) V trojúhelníku T_1T_2T je $|T_1T_2|=\frac{c}{3}$ a výška $\frac{2}{9}\,v_c$, proto je jeho obsah roven $\frac{2}{27}$ obsahu trojúhelníku ABC. Analogicky v T_2T_3T je $|T_2T_3|=\frac{b}{6}$ a velikost výšky $\frac{5}{18}\,v_b$, proto je jeho obsah roven $\frac{5}{54}$ obsahu trojúhelníku ABC. Obsah šestiúhelníku je tedy

$$3\left(\frac{2}{27}+\frac{5}{54}\right)=\frac{1}{2}$$

obsahu trojúhelníku ABC.

Úloha 2: V trojúhelníku ABP jsou AD, BC, PR jeho výšky. Výšky AD, BC se protínají v bodě Q, Takže jím prochází i výška PR.

Závěr

Tento článek představil dvě velice užitečné věty – větu Menelaovu a větu Cèvovu s jejich důkazy. Následně byly dokázány vlastnosti těžnic a výšek trojúhelníku pomocí těchto vět, tedy jiným způsobem než byly dokázány v předchozím článku. Stejné či podobné důkazy je možné najít např. v publikacích [1, 2, 3, 4]. V následujících článcích se budeme zabývat dalšími trojicemi bodů ležícími na téže přímce, přitom hojně využijeme věty uvedené právě v tomto článku.

Literatura

[1] *Boček, L., Zhouf, J.*: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.

[2] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické vydavatelstvo, Bratislava, 1990.

[3] *Kadleček, J.*: Geometrie v rovině a prostoru. Prometheus, Praha, 1996.

[4] *Švrček, J., Vanžura J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.